



Leyendo a Euclides

BEPPO LEVI

Prólogo de Mario Bunge



libros del
Zorzal

Levi, Beppo
Leyendo a Euclides - 3a ed. - Buenos Aires : Libros del Zorzal, 2006.
224 p. ; 21x14 cm. (Formación docente. Matemática; 6)

ISBN 987-599-020-5

1. Formación Docente. I. Título
CDD 371.1

Diagramación y Diseño de Tapa e Interiores
Octavio Kulesz

Corrección
Patricia Barreiro - Octavio Kulesz

Ilustración de Tapa
La Escuela de Atenas, Rafael Sanzio

Printed in Argentina
Hecho el depósito que previene la ley 11.723

ISBN-10 987-599-020-5
ISBN-13 978-987-599-020-3

Libros del Zorzal

info@delzorzal.com.ar
www.delzorzal.com.ar

Índice

Euclides Dos Milenios Después

El famoso matemático Euclides floreció ca. 300 a. C. Entre otras cosas, conjeturó y demostró que hay infinitos números primos (indivisibles). Se ganó la vida dando lecciones de matemática a gentes curiosas, deseosas de aprender por saber, no para hacer. Cuenta la tradición que, cuando un alumno en ciernes le preguntó qué provecho material podría sacar del estudio de la matemática, Euclides habría llamado a su esclavo y le habría dicho: "Dale un óbolo a este desdichado, ya que cree que debe ganar para aprender".

Es muy posible que Euclides haya estado conectado con el Museo de Alejandría, puesto que en este instituto estatal de investigaciones científicas y humanísticas se había congregado la flor y nata de la intelectualidad de su época. Los investigadores del Museo cobraban sueldos del tesoro real por producir conocimientos que rara vez tenían aplicación práctica. Solamente formaban y amoblaban cerebros curiosos e ingeniosos, empezando por los propios. ¿Cuántos estadistas de nuestro siglo entienden que el conocimiento básico es el más útil, por ser utilizable en múltiples campos?

La principal obra de Euclides, titulada *Elementos*, es el libro secular más estudiado de la historia. Recopila y sistematiza los conocimientos geométricos de su tiempo. Por esto se ha dicho que Euclides no fue original: que sólo compiló invenciones ajenas. Quienes repiten esta tesis desconocen

que Euclides construyó la primera teoría propiamente dicha que registra la historia, es decir, el primer sistema hipotético-deductivo. Antes que él, la matemática era un montón de resultados sueltos; a partir de él, se fue convirtiendo en un supersistema de sistemas relacionados entre sí.

Más precisamente, Euclides introdujo de manera explícita el formato (también llamado método) axiomático. Éste consiste en empezar por listar los conceptos básicos y los postulados –o sea, ideas no derivables de otras ideas en el mismo sistema– y en derivar (definir o deducir) de ellos los demás.

La axiomática es el parangón de organización racional y económica de un cuerpo de conocimientos cualesquiera sean, matemáticos, físicos, económicos, filosóficos, o lo que fuere. Por ejemplo, Spinoza lo usó en su gran *Ética*. Hoy día lo empleamos los filósofos exactos para aclarar, sistematizar y probar ideas en cualquier rama de la filosofía.

Sin embargo, recién el gran David Hilbert, a fines del siglo XIX, advirtió y exaltó las virtudes de la axiomática. La usó en matemática y física, y se erigió en su campeón (Hilbert, 1918). Entre las virtudes de la axiomática figuran las siguientes: economía, aceleración de la deducción, facilitación del examen de coherencia lógica, puesta en descubierto de suposiciones, individualización de los conceptos básicos o primitivos (definidores), y búsqueda de fundamentos cada vez más profundos. Estas virtudes hacen casi plausible la anécdota según la cual Blaise Pascal, a los catorce años, habría reconstruido por sí mismo el grueso de la geometría euclídea a partir de sus postulados.

Sin embargo, el formato axiomático puede engañar, sugiriendo que un sistema de axiomas basta para deducir todos

los teoremas en un campo dado. De hecho, salvo en el caso de las consecuencias inmediatas (corolarios), es preciso agregarles suposiciones, tales como construcciones, ejemplos o lemas (proposiciones robadas de campos aledaños). Por ejemplo, para probar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos, conviene empezar por trazar una recta paralela a uno de los lados. Otros teoremas euclídeos requieren otras construcciones *ad hoc* más o menos ingeniosas. Tal vez por este motivo Einstein, siendo ya famoso y estando muy ocupado, se tomó el trabajo de escribirle al psicólogo Wertheimer una carta exponiéndole dos pruebas diferentes del teorema geométrico del antiguo Menelao.

Esto, junto con su sistematicidad y su rigor lógico, hace que el estudio de la geometría euclídea sea acaso más formativo que el de la geometría analítica o el cálculo infinitesimal. Teorías éstas que poseen algoritmos (reglas) que se pueden aplicar uniformemente y en muchos casos mecánicamente. Ése, además de la inercia secular, es uno de los motivos por los cuales los *Elementos* fueron utilizados como libro de texto en todo el mundo durante dos milenios. Su estudio exige tanto ingenio y empeño como rigor. Forma tanto matemáticos como abogados.

La lógica de la geometría de Euclides, en particular su sistematicidad y coherencia, sigue suscitando admiración. No debiera extrañar entonces que un matemático moderno, como Beppo Levi, le haya dedicado un estudio profundo, aunque sin la pesada carga erudita habitual. Ni es de extrañar que, a su vez, este libro del matemático italo-argentino despierte la curiosidad de lectores contemporáneos. (Hace dos décadas yo intenté reeditarlo en una colección que dirigía,

pero mi editor catalán no se interesó y, por añadidura, extravió mi ejemplar del libro.)

Beppo Levi (1875-1961) fue un matemático tan versátil como distinguido. Aunque trabajó principalmente en Geometría Algebraica, hizo importantes incursiones (o "correrías", como él mismo las llamaba) en otros campos, tales como el Análisis Matemático, la Teoría de Números, la Teoría de Conjuntos, la Lógica y la Didáctica de la Matemática. Semejante universalidad es inconcebible hoy día, en parte porque se sabe tantísimo más y en parte porque se sobreestima la especialización, sin reparar en que las fronteras entre las disciplinas son en cierta medida artificiales.

Se ha dicho que, entre 1897 y 1909, Levi participó activamente en todos los nuevos desarrollos de la matemática de la época (Schappacher y Schoof, 1996). Su nombre aparece asociado, directa o indirectamente, con los nombres de casi todos los grandes matemáticos de su tiempo, entre otros Hilbert, Lebesgue y Poincaré. Además, sus contribuciones pertenecen a la prehistoria de varias ramas de la matemática que emergieron después de Levi.

Entre otras cosas, Levi fue quizá el primero en formular explícitamente y en criticar el famoso axioma de elección, usualmente atribuido a Zermelo (Moore, 1982). Descubrió que se lo había estado usando tácitamente en muchas demostraciones matemáticas. (Dicho axioma sigue siendo motivo de estudios.) Pero Levi es mejor conocido por el lema que lleva su nombre, y que se refiere a integrales de sucesiones monótonas de funciones. También se lo conoce por su estudio, más importante, de singularidades de superficies algebraicas.

Irónicamente, este gran hombre ha sido llamado el matemático más petiso del siglo, era jorobado, tenía una voz chillona y estaba casado con una mujer hermosa, con quien tuvo tres hijos, entre ellos Laura, la física de la familia. Aunque Levi no pasó el examen de pureza racial, vivió muchos más años, se comportó muchísimo mejor, y concibió y crió más hijos y más ideas que su victimario, Benito Mussolini.

La legislación antisemita promulgada por el gobierno fascista italiano en 1938 privó a Levi de su cátedra en Bologna y lo obligó a emigrar junto con su familia. A los 64 años de edad recomenzó su vida: vino a parar a la rama rosarina de la Universidad Nacional del Litoral. Esto se debió a la gestión de su ilustrado rector, el Ingeniero Cortés Plá, y del matemático Julio Rey Pastor, gran animador de la ciencia en Argentina y España. (Yo tuve el privilegio de tratar a los tres y la suerte de que Levi y su colega, el jusfilósofo José Luis Bruera, votaran en favor mío cuando se concursó la cátedra de Filosofía de la Ciencia en la Universidad de Buenos Aires.)

En su nueva patria, Levi hizo un poco de todo. Dictó cursos para ingenieros; en 1940 fundó y dirigió el Instituto de Matemática y su revista, *Mathematicae Notae*; alentó a los pocos jóvenes que entonces se interesaban por la matemática pura; participó en reuniones de físicos; siguió cultivando las humanidades; e incluso encontró tiempo para responder algunas cuestiones matemáticas que le formulé. Era un trabajador entusiasta, incansable y diligente. Vivió los últimos 23 años de su fecunda vida en Rosario, donde enseñó hasta los 84.

Levi ponía pasión en todo lo que hacía. Por ejemplo, solía retarnos vehementemente a los físicos que, apurados por calcular, teníamos poco respeto por el rigor formal. En

particular, le indignaba la famosa delta de Dirac, sin la cual los físicos cuánticos no podíamos avanzar. Levi sostenía, con razón, que no era una función sino un monstruo (afortunadamente, muy poco después el gran matemático Laurent Schwartz rigorizó este concepto).

¿Qué resultó del encuentro de Euclides con Levi a la vuelta de veintidós siglos? Lo averiguarán quienes lean este libro tan original como claro.

Aprenderán a ver a Euclides, e incluso a su posible maestro, Platón, con ojos modernos. Y aprenderán, si no lo saben ya, los deleites de la conversación con muertos sin recurrir a trucos espiritistas.

MARIO BUNGE

Foundations and Philosophy of Science Unit,
McGill University, Montréal

REFERENCIAS

HILBERT, D. Axiomatisches Denken. Repr. en *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3. Berlín: Julius Springer, 1918.

MOORE, G. E. *Zermelo's Axiom of Choice*. Nueva York: Springer-Verlag, 1982.

SCHAPPACHER. N. y R. Schoof. Beppo Levi and the arithmetic of elliptic curves. *The Mathematical Intelligencer*, 18: 57-69, 1996.

Nota a la Segunda Edición

Es una alegría muy grande, para mí, hija de Beppo Levi, llegar a saber que jóvenes matemáticos están hoy interesados en reeditar *Leyendo a Euclides*, libro escrito hace más de 50 años, y que tuvo para el autor un significado muy especial. En efecto, por un lado el libro le brindaba la oportunidad de dirigirse a un público más vasto que el de matemáticos puros, aunque siempre interesado en el desarrollo del pensamiento humano; por el otro, precisamente le permitía expresar su profundo interés en ese pensamiento, distinguiéndolo, en su valor de abstracción, de la simple representación de hechos materiales.

El libro consta de dos partes: una primera que puede considerarse una introducción histórico-filosófica a los *Elementos* de Euclides, y una segunda en la cual se presentan los *Elementos* con sus principales características.

En esta breve introducción, se hará referencia únicamente a algunos puntos de la primera parte, debido a su interés de carácter más general y también al tratamiento histórico no estrictamente tradicional que ellos ofrecen y que, por esta característica, puede hacerlos objeto de alguna observación crítica, como ya ha sucedido en el pasado.

Recordaremos en primer lugar el título de este capítulo introductorio: "La Geometría y el Pensamiento Socrático". Tenemos que observar que este título se ha relacionado en algunos casos con la intención del autor de ubicar la obra de

Euclides en un período próximo a la vida de Sócrates, es decir anterior de casi un siglo a lo que se hace habitualmente, cuando se considera a Euclides un autor alejandrino que desarrolló su actividad no antes del 300 a.C. A este propósito dice efectivamente A. Terracini, en su "Commemorazione di Beppo Levi", pronunciada delante de una asamblea de la Academia de los Linceos: "En Beppo Levi los *Elementos* de Euclides aparecen más bien como el fruto de las concepciones del círculo de matemáticos y filósofos que rodeaban a Sócrates que la obra de un Alejandrino del 300 a.C.". Sin duda algo de cierto hay en esta observación; sin embargo, habiendo muerto Sócrates en 399 a.C., bien puede el pensamiento de los filósofos que lo rodearon, entre ellos en particular el de Platón, haber influenciado la obra de Euclides, aunque ésta haya aparecido casi un siglo más tarde. Efectivamente, la lectura del texto nos mostrará en seguida que Beppo Levi pretende en realidad relacionar la geometría de Euclides con el pensamiento expresado en los diálogos de Platón aunque poniendo en evidencia que el pensamiento platónico nace precisamente del pensamiento socrático. En el texto de Beppo Levi existe, es cierto, un pequeño problema de fechas: en él se hace notar que la única información histórica sobre Euclides la tenemos de Proclo, filósofo neoplatónico que vivió entre el 415 y el 485 d.C., es decir 700-800 años después del período en el cual se supone actuó Euclides (o cerca de 1.000 años después, como indica Beppo Levi). El autor señala, en consecuencia, la dudosa certeza de tal información y hace notar que algunas frases del texto de Proclo podrían interpretarse como sugiriendo que los *Elementos* de Euclides ya eran conocidos por Eudemo de Cnido, discípulo de Aristóteles, es decir en un período varios años anterior al 300 a.C. En reproducciones recientes del texto

de Proclo no se da lugar a tal duda y se considera que la composición de los *Elementos* debe ubicarse en el período Alejandrino, es decir, en el III siglo a.C.

Otro detalle que acentúa la tendencia de Beppo Levi a ubicar la vida de Euclides en un período algo anterior al considerado probable de acuerdo con la moderna crítica histórica es su referencia al diálogo de Platón *Theetetes* o *Del Conocimiento*. La referencia en el texto a dicho diálogo es por cierto muy natural, puesto que efectivamente Theetetes es un reconocido predecesor de Euclides, cuyos descubrimientos se consideran incluidos en los *Elementos*. Sin embargo, Beppo Levi no deja de recordar que el diálogo propiamente dicho está precedido por un prólogo en el cual Euclides de Megara, filósofo contemporáneo de Platón, conversa con un coterráneo, Terpsión, sobre su encuentro con Theetetes, a quien había ido a saludar cuando volvía mortalmente enfermo de la guerra del Peloponeso. Delante de ese prólogo, donde Euclides recuerda haber cuidadosamente redactado el diálogo ocurrido unos años antes entre Sócrates y Theetetes, con la ayuda no sólo de la memoria sino también de repetidas conversaciones con Sócrates, Beppo Levi no puede evitar retornar a la hipótesis, ya enunciada por autores anteriores, de una coincidencia entre el Euclides de los *Elementos* y el de Megara. Dicha hipótesis parece hoy descartada. Levi es consciente de ello, pero la señala porque concuerda con su opinión relativa al importante lazo existente entre el pensamiento filosófico platónico (o socrático) y lo que él quiere especialmente resaltar de la geometría euclidiana, es decir, su capacidad de abstracción con respecto a la simple resolución de problemas materiales.

Por otro lado, la supuesta relación entre la geometría euclidiana y el pensamiento revelado por los diálogos de Platón no

está tampoco en contradicción con los pocos datos históricos de los que se dispone, todos derivados del texto de Proclo, los cuales sugieren que Euclides pasó por la Academia de Atenas antes de iniciar su actividad docente en la recién fundada Alejandría. Pero lo que quiere poner en evidencia Beppo Levi con la expresión "pensamiento socrático" es la profunda conexión que los diálogos de Platón revelarían con el pensamiento del maestro, Sócrates. En cierto sentido Levi, que no es estrictamente un filósofo, se deja fascinar por la figura de Sócrates tal como aparece en los diálogos de Platón y acentúa en consecuencia la conexión entre el pensamiento de ambos filósofos. A este propósito, es interesante observar que, no obstante la indudable independencia creativa de Platón, también filósofos de autoridad reconocida ponen en evidencia esta conexión, como muestra el capítulo sobre Platón y Sócrates de Karl Jaspers, donde se dice por ejemplo: "La dualidad-unidad constituida por Sócrates y Platón, es un caso único en la historia de la filosofía, encierra una verdad que lo envuelve todo".

Podemos concluir observando que el lector interesado en la obra de Euclides podrá no tener demasiado en cuenta la discusión propuesta por Beppo Levi sobre el tiempo en que Euclides vivió, y podrá reemplazar en su mente "el pensamiento socrático" por "el pensamiento platónico", sin que esto modifique sensiblemente el sentido del libro.

Consideramos en consecuencia que conviene respetar aquí la forma de exposición del autor, presentando la obra tal como él la pensó y escribió.

LAURA LEVI

Prólogo

Al leer el título y el nombre del autor de este libro alguien pensará en alguna contribución de crítica matemática; no quiero negar que el atento lector pueda encontrar también algo de esto aquí. Pero no es ésa la razón de ser del presente trabajo, que en mi pensamiento estaría completamente perdido si llegara a ser considerado de matemático para matemáticos, si no pudiera cautivar la atención de lectores precisamente no matemáticos; aun si pudiera pasar por un libro de historia de la matemática.

Yo, para escribir tal libro, no tengo erudición.

La moderna crítica histórica de la ciencia –no tan moderna, diremos para puntualizar, como para no alcanzar las dimensiones del siglo– parte del presupuesto evolucionista, tomado ciertamente a préstamo de la biología, pero muy bien acomodado para poner en el olvido el poder creativo de la personalidad humana que mal se conforma con la presente era mecánica. Establece entonces en primer lugar una cronología que, cuando se extiende a la antigüedad, tiene a menudo sus bases muy inseguras. Desde luego, no es que queramos poner en duda la cronología histórica en sentido estricto, proporcionada por los monumentos y por los grandes hechos militares, políticos y sociales; pero consideramos muy débil el valor documentario de citas y recuerdos insertos en los trabajos científicos de cualquier época,

cuando pensamos en la poca confianza que puede tenerse aún hoy en las atribuciones de paternidad desparramadas por las citas bibliográficas, mientras podría pensarse que la facilidad de las comunicaciones y la imprenta deberían ser suficientes para eliminar la eventualidad de repetir noticias por simple oído.

Y sobre esta cronología, la crítica va luego bordando una filiación de las ideas, recogiendo indicios de analogías muy a menudo arbitrarias. Pues es bien cierto que cada uno absorbe necesariamente del ambiente en que vive; y si es estudioso, absorbe sin querer de quien le ha precedido en la contemplación y en la reflexión; pero las reacciones del espíritu son infinitas, y no siempre son de comprensión, de consentimiento, de adaptación o de obediencia, frecuentemente también son de oposición y de crítica.

Los *Elementos* de Euclides constituyen la composición científica más antigua y extensa que nos haya llegado en una integridad casi perfecta; y, suerte singular, composición de una ciencia que no ha cambiado desde entonces sus fundamentos; de modo que su lectura, todos lo saben, ha quedado en todo actual; suerte singular, repito, cuando pensamos que no le han faltado a veces, y aun en tiempos recientes, los ataques del empirismo para quitarle su aureola de verdad física, los que sin embargo han dejado inalterada su importancia como verdad práctica y como fundamento teórico de toda matemática.

La crítica histórica se pregunta cómo ha podido formarse tal acervo de conocimientos y ordenarse en sólida construcción tan poco común. Descubre entonces por noticias fragmentarias, generalmente sin documentos certe-

ros, que desde tres o cuatro siglos antes de Euclides, quizá más, los griegos practicaban geometría; acaso una geometría puramente utilitaria heredada de otros pueblos, más antiguos; acaso una geometría entre mística y física; y descubre también que aun el título de "Elementos" no es nada nuevo y original; al contrario es algo tradicional como para nosotros "tratado" o "curso". ¿Serán luego los *Elementos* de Euclides una recopilación más o menos buena, más o menos adulterada, que un modesto profesor ha redactado en forma de apuntes útiles para sus alumnos y que han tenido la suerte de parecer útiles también a muchas personas cultas y a muchos alumnos de las generaciones siguientes? ¿O será tan desatinado emprender una vez la lectura imaginando al filósofo-matemático, que tiene fe en el valor moral de la capacidad razonadora del hombre, y que prueba sus fuerzas en la construcción de un *inútil monumento deductivo*, que no tiene otro fin que el de alegrarse al mirar cómo parece la realidad plegarse para hacerse espejo de la invención abstracta?

Debo declarar que, aun habiendo siempre tenido para con la obra euclidiana consideración mucho mayor que para la de un recopilador, mi conocimiento de ella fue hasta tiempos muy recientes el que cualquier matemático tiene de la obra madre de la Geometría. Al encararla bajo el otro aspecto, se me desplegó delante una unidad y una armonía que han compensado el esfuerzo. Quisiera que el lector, que no tiene necesidad de ser matemático, me acompañara con igual sentimiento.

Para este lector no matemático no creo inútil una advertencia y es que el autor matemático ha creído poder seguir

charlando a veces sin temor de asustarlo con alguna abstrusería del arte. En tal caso no tiene más que pasar por alto el detalle y seguir leyendo a continuación, pues el sentido esencial saldrá ileso.

BEPPO LEVI

Rosario, septiembre de 1947

La Geometría

y

el Pensamiento Socrático

Quiera disculparnos el lector esa leve ironía que en el prólogo nos permitimos para la cronología; hablábamos de los precursores; y ¿por qué no deberíamos extenderla al mismo Euclides? En efecto, cuando nos ponemos a estudiar los *Elementos* como un texto de Geometría, muy poco puede importarnos cuándo y dónde el tal Euclides haya actuado, y aun diríamos, que Euclides haya vivido en algún tiempo su vida humana. Sin embargo, es casi tema obligado para los autores que tratan del argumento anunciar que Euclides vivió en Alejandría alrededor del año 300 antes de Cristo, porque así nos lo asegura Proclo, un filósofo neoplatónico que vivió en Bizancio cerca de 1.000 años más tarde. De Proclo tendremos que hablar varias veces y no queremos por el momento contradecir su afirmación. Nos contentaremos con observar que, en razón de esos 1.000 años de intervalo, no estaba él probablemente en condiciones mucho mejores que las nuestras para decidir la cuestión; y por cuanto un cierto interés tenemos, únicamente como punto de referencia, en colocar los *Elementos*, por lo menos groseramente, en el tiempo y en el espacio, vamos a aceptar, como aproximación suficiente (la que, por otra parte, tendremos que confirmar), que los *Elementos* son un producto del pensamiento griego en una época que precede, no en mucho, pero que podría llegar al siglo, a dicho año 300. También el nombre de Euclides podrá

servir como medio para el discurso, y podemos considerarlo tan sólo como la personificación de ese pensamiento; más detalles sobre la persona –si tal persona existió y fue geómetra– no nos interesan por el momento.

No entendemos afirmar con esto que Proclo trabajara de fantasía. Todo lo contrario; fue ciertamente en su tiempo hombre de estudio y de cultura variada, un erudito profesor a la moda escolástica que, sin ser matemático él mismo, pudo dictar geometría; y escribió, entre otras cosas, un comentario de los *Elementos* que, en lo que ha llegado a nosotros, no se extiende más allá del Libro I, aunque, según refiere Heath, debe suponerse que el autor tuvo alguna vez intención de dictar también sobre los Libros siguientes. Entre otras cosas, contiene este comentario la reproducción de una noticia histórica sobre el desarrollo de la matemática griega antes del tiempo de Aristóteles; la cual, por consejo de éste, habría sido escrita por un alumno, Eudemo de Cnido, pero que Proclo conoce solamente de segunda o tercera mano, por intermedio de otros escoliastas, Gemino y Simplicio, que vivieron en los primeros siglos de la era vulgar. A esta noticia tendremos que referirnos alguna vez valiéndonos de una traducción de P. Tannery, reproducida por A. Rey en el opúsculo: *Les mathématiques en Grèce au milieu du Ve siècle*[1].

Las últimas palabras de esa noticia serían pues:

"(...) Felipe de Medma, discípulo de Platón que lo dirigió a la matemática, hizo investigaciones, según las indicaciones de su maestro, pero se propuso también todas las cuestiones

[1] Actualités scientifiques et industrielles. Hermann. París, 1935.

que le parecieron útiles para la filosofía de Platón. Hasta ese Felipe llegan los que han escrito historias sobre los desarrollos de la Geometría.

"Euclides, el autor de los *Elementos*, no es mucho más joven; puso orden en varios trabajos de Eudoxo, perfeccionó los de Theetetes y también dio demostraciones irrefutables de las cosas que sus predecesores no habían demostrado en modo suficientemente riguroso."

El último párrafo contiene posiblemente una pequeña contradicción cronológica: comparando con las últimas palabras de la línea anterior debemos inferir que o bien este período es un comentario personal del escoliasta y la noticia histórica de Eudemo termina con Felipe de Medma, o bien Eudemo habla de Euclides por su conocimiento personal, en cuanto todavía el autor de los *Elementos* no había entrado en la historia de la Geometría. En el primer caso, este último párrafo es puramente conjetural; en el segundo, deberíamos concluir que en el tiempo de Aristóteles la obra de los *Elementos* estaba completamente compuesta, y teniendo en cuenta que Aristóteles fue maestro de Alejandro, deberíamos transportar a Euclides por lo menos medio siglo más allá del tiempo que Proclo le atribuye[2]; esto concordaría por otra parte con la afirmación de que "Euclides no es mucho más joven [que Felipe]".

Hemos declarado que estos detalles no deben interesarnos por el momento. Dirijámonos, por el contrario, a las

---

[2] T. VOGT: *Die Lebenszeit Euklids*, Bibliotheca Mathematica (3) 13 (1912), retrodata en efecto la vida de Euclides al período 365-325 a.C. y la formación de los *Elementos* a los últimos años.

primeras líneas del resumen de Eudemo: "Decimos que, según la tradición general, son los egipcios quienes primeramente inventaron la Geometría, y que ella ha nacido de la medición de los terrenos, que ellos tenían que renovar continuamente a causa de que las crecidas del Nilo hacían desaparecer los límites entre las propiedades. Por nada debe considerarse asombroso que una necesidad práctica haya producido la invención de ésta y otras ciencias, porque todo lo que está sometido a la generación procede de lo imperfecto a lo perfecto; hay por lo tanto un progreso natural de la sensación al razonamiento, de éste a la inteligencia pura. Del mismo modo, así como el exacto conocimiento de los números ha empezado por los fenicios a consecuencia del tráfico y de las transacciones en que se ocupaban, la Geometría ha sido inventada por los egipcios por la razón que he dicho".

He aquí, en unas pocas palabras, muchas, muchísimas cosas ¡y muy modernas! He aquí primero el origen empírico de la Geometría y la explicación etimológica, demasiado clara como para hacer perfectamente inútil el ficticio recuerdo de los campos egipcios; he aquí la alusión al origen práctico de la ciencia de los números tan inconmensurablemente lejana de la que aprenderemos de Euclides y he aquí también la filosofía evolucionista del progreso natural de la sensación al razonamiento y de éste a la inteligencia pura.

En los diálogos platónicos la palabra *geometría* sale muchas veces de la boca de Sócrates, pero siempre con un sentido totalmente abstracto. Y ¿qué mejor oportunidad habría podido presentarse al filósofo para alabar el origen práctico, que la de proveer, en la *República*, a la justa distribución de las tierras? ¿Quién puede, aun respetando la etimología, sacarnos de la

duda de que esta Geometría no fuera, desde su primera creación, algo mucho más ideal, a la par con la astronomía y la música, con las cuales Sócrates la acopla constantemente? ¿Quién puede sacarnos de la duda de que el pretendido origen empírico, tan bien especificado por Eudemo y por Proclo, no sea más que una aplicación arbitraria de una tesis metafísica? No es necesario en efecto referirse a la medición de terrenos y a los egipcios para considerar las múltiples ocasiones en las cuales diariamente se encuentran, en cualquier civilización, aunque no sea la nuestra industrial y científica, artesanos y artistas, carpinteros, albañiles, etc., las que son más que suficientes para explicar que ya en edad remota, mucho antes de empezar el primer milenio a. C., un cierto número de conocimientos geométricos circulara entre los pueblos del Oriente Euroasiático, según toda verosimilitud en el mismo plano de los primeros conocimientos físicos y mecánicos que definen el concepto mismo de civilización. Pudieron estos conocimientos constituir el substrato intuitivo para relaciones intelectivas cuyo desenvolvimiento empieza en la Geometría de Euclides y que paulatinamente ha venido desarrollándose en la matemática; pero ellos mismos no pudieron merecer el nombre de *geometría*.

Paul Tannery concluye su interesante estudio sobre "*Une correspondance d'écolâtre du XIe siècle*"[3] con las palabras siguientes: "El adelanto de la Aritmética sobre la Geometría subsistirá durante toda la Edad Media y también en el Renaci-

---

3 Notes et Extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale et autres Bibliothèques, t. XXXVI, p. 512. París, 1900.

miento hasta el momento en que los matemáticos tendrán finalmente el modo de estudiar, en traducciones inteligibles, los trabajos de Arquímedes y de Apolonio. Vemos allí un hecho en el cual el genio griego aparece en la humanidad como una excepción que no tiene análogo". ¡Expresión inigualable de una admiración y de una verdad que pide explicación! No debemos preguntar por ello por qué Arquímedes y Apolonio en lugar de Euclides; por mucho que tengamos admiración por el primero, mientras el segundo ocupa ciertamente un nivel mucho más bajo, su efectivo conocimiento y su influencia sobre el desarrollo de la matemática lo llevaría, en la consideración de Tannery, demasiado cerca de nosotros. Quizás, en la elección de los nombres representativos del genio griego haya influido más bien el momento mismo en que las palabras fueron escritas, los recientes descubrimientos bibliográficos que, para el primero principalmente, habían revelado la extraordinaria extensión y modernidad de su pensamiento, y el auge de la geometría proyectiva y de la dinámica (cosas que evidentemente desplazan un poco el sentido verdadero de la espontánea admiración del historiador). Tampoco debemos fijarnos mucho, por el momento, en la comparación entre Aritmética y Geometría, que encuentra su explicación únicamente en los argumentos desarrollados en el estudio citado. Queda para nosotros la pregunta: ¿es posible en la historia del pensamiento humano esa excepción?, ¿cuál es el secreto que ella encierra?, ¿de dónde proviene que sólo en un pequeño rincón de la Tierra, en una duración que no es fácil limitar, pero ciertamente del todo insignificante frente a la historia de la civilización –acaso sólo uno o dos siglos– en un pueblo sin potencia

política, actor y víctima de las luchas de dominación, haya podido desarrollarse un fenómeno único entre los valores humanos?

Nuestras costumbres mentales rehuyen lo único; también sobre esto nos informa Proclo: "Como lo ha dicho el sobrehumano Aristóteles, los mismos pensamientos han venido sucesivamente a los hombres en ciertas épocas determinadas del universo y no es en nuestro tiempo o en el tiempo que conocemos por la historia que las ciencias se han constituido por primera vez (...)". Pero un poco de reflexión nos dice que las grandes etapas de la historia brotan efectivamente de lo singular; basta pensar, por ejemplo, en la Biblia y en el advenimiento del Cristianismo que, podría no ser casualidad, emerge, a poca distancia de tiempo, igualmente de otro pueblo pequeño, aun más insignificante que el griego. La comparación la considero –sea dicho– menos descabellada de lo que el lector pueda pensar de primera intención; en las páginas siguientes quisiera llevarlo conmigo a buscar la contestación a los interrogantes en un pensamiento filosófico-moral, en la virtud orientadora de una predicación que aun en el pueblo griego que tuvo la suerte de prestarle el nombre, pudo reunir tan sólo una muy corta escuela, y que aun al correr el tiempo pudo ser aceptada completamente sólo por una contada minoría de pensadores, afirmando la superioridad incontrolable del autojuicio de la mente humana sobre las manifestaciones de los hechos y sobre los consentimientos de la opinión vulgar.

Quiero insistir un momento sobre una declaración que hice en el prólogo: no tengo erudición; y, en particular, no conozco griego. Que, por esta razón, haya tenido que leer

traducciones de la obra de Euclides, no extrañará a nadie, pues se trata de una obra científica; pero tendré que hablar de Platón y de las noticias que se pueden sacar de los *Diálogos* para alumbrar nuestro estudio; tuve también que leerlo de las traducciones; hice lo posible para que fueran traducciones buenas, que con la fidelidad unieran el gusto literario y allí me he convencido de que es posible leer a Platón, no con el fin deliberado de enterarse sobre la filosofía platónica, sino del mismo modo como se lee una obra de amena literatura, donde el autor se esfuerza por presentar a sus personajes en sus modos respectivos de pensar, a veces también contrastantes. Sin excluir, desde luego, el hecho de que, como siempre ocurre, el pensamiento del autor tenga sus reflejos en el desarrollo del drama, me pareció que, por lo general, cuando Platón hace hablar a Sócrates, son verdaderamente las enseñanzas del último y a veces también sus modales los que se quieren reproducir; y por esta razón yo citaré a Sócrates muchas veces cuando, para seguir las costumbres de la crítica filosófica, habría tenido que decir Platón [4].

Me parece –y, repito una vez más todavía, excluyendo toda pretensión de una especialización que no tengo– que

[4] En la clásica obra sobre Platón de Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff, está observado (p. 21) que ya Rudolph Hirzel supuso que el diálogo socrático fue rememoración y reproducción de discursos que Sócrates tuvo efectivamente. Apoyaría esta opinión el hecho de que Philodemo afirma que dos de los últimos discípulos de Sócrates, Erastos y Asclepíades, habrían también publicado apuntes de esas enseñanzas. Pero comenta el autor que, aun admitiendo que alumnos de Sócrates escribieran más tarde algo de tales

desaparecen de esta manera muchas dificultades reconocidas en la interpretación de la filosofía platónica. Todos están de acuerdo, para dar un ejemplo, –y no puede haber duda porque lo afirma el mismo Platón– en que la *República* y el *Timeo* están vinculados por un concepto de continuidad; a menos que esta continuidad se quisiera entender en el sentido de corrección; que, pasados los años, habiendo cambiado Platón en modo incomprensible sus vistas filosóficas, hubiera querido hacer en el apéndice (el *Timeo*) la enmienda de las opiniones expresadas en la *República*, nadie puede concebir que las tesis de los dos diálogos puedan caber en la misma cabeza. El sistema socrático en la *República* es espiritual; la filosofía de *Timeo* se puede enteramente comparar –cambiados los tiempos– con algo como nuestra filosofía positivista. El fundamento del *Timeo* son verdaderas observaciones en el campo de la filosofía natural; aunque tales observaciones biológicas y aun físicas, químicas y astronómicas están mezcladas con trozos de un misticismo irracional; y bien se sabe por otras fuentes que ésta fue exactamente la característica de los métodos pitagóricos, al mismo tiempo experimentales y fantásticos. Condiciones, debe notarse, no

---

notas, falta todavía cualquier prueba de que ese material bruto pueda haber sido el substrato de los artísticos diálogos platónicos. Concluye el crítico que de todas estas indicaciones no puede deducirse que un diálogo socrático deba entenderse como obra de Sócrates más de lo que puede creerse a la fábula de que el mismo Sócrates hubiera publicado los escritos de Aisquines. Queda claro que no hay oposición entre la opinión expresada en el texto y el valor literal de estas noticias.

tan contrastantes entre sí y no tan distantes de actitudes muy modernas como la definición del propio positivismo podría a primera vista dejar pensar.

La razón es que, cuando el interés se dirige principalmente sobre los hechos, y los hechos aprietan de todas partes con su fuerza brutal, cualquier ficción es buena para ponerle un orden provisional, sea tal ficción el mínimo esfuerzo de la naturaleza o las propiedades específicas o el recóndito acuerdo entre una operación simbólica y una transformación física. Así en el *Timeo* se juguetea con algún caso particular del teorema de Pitágoras que, por universalmente conocido, no es necesario justificar racionalmente, poniéndolo en relación con una hipotética belleza del universo; y una rudimental química de los poliedros [5] se pone en relación con las transformaciones físicas de los elementos. Pero el acervo de hechos allí considerados, un verdadero sistema del mundo, es inconmensurable con los menudos análisis de la *República.* Me permito pensar que la extensa charla de Sócrates sobre Atlántida con la cual empieza el *Timeo* –el

5 Las banales relaciones entre los números de caras de los poliedros para explicar cómo el agua se transforma en aire (vapor) y en tierra (hielo) nos parecen bien merecer este nombre. Para quien, fundándose sobre un hipotético manejo que los pitagóricos tuvieran de los poliedros regulares, pensara que pudiera haber en la imaginación de Timeo algo de más profundo que palabreras coincidencias aritméticas, haré notar que una verdadera "química" de descomposición de los poliedros regulares en partes que permitieran recomponer unos con otros *volumétricamente* es bien posible; y con poca reflexión habría estado completamente al alcance de los pitagóricos. Pero el pequeño esfuerzo o no se hizo o pareció superior a la capacidad del vulgo, al cual la mística estaba dirigida.

mismo Sócrates que luego se calla completamente cuando empieza la exposición de la teoría pitagórica, extraña evidentemente a sus intereses– podría, en la propuesta interpretación literaria de los *Diálogos*, significar una leve ironía para indicar que, cuando quisiese abandonar el razonamiento moral, también Sócrates sabría poner alas a la fantasía y renunciar al diálogo mayéutico.

Y en el libro X (último) de la *República*, en el mismo instante en que critica a Homero y a los poetas porque, con el aliciente del cuento fantástico, propagan pasiones y falsas enseñanzas, se había detenido Sócrates en contar el mito de Er visitando el Averno, desarrollando allí un largo recamado que no tiene otro fin positivo que llevar a la conclusión final: "No será el propio demonio el que os elegirá, sino que cada uno de vosotros elegirá a su demonio... La virtud no pertenece a nadie; según que cada uno la honre o la desprecie, más o menos obtendrá de ella. La culpa es de quien elige; el dios no tiene culpas" (617 e). (...) "Aquí, desde luego, mi querido Glaucón, está todo el peligro para el hombre, y es por eso necesario tener el máximo cuidado para que cada uno, despreciando toda otra ciencia, de aquella única sea investigador y discípulo, si es que en algún lugar pueda encontrarla y aprenderla, la que pueda enseñarle y capacitarle, después de haber escrudiñado la vida buena y la mala, a preferir siempre y dondequiera la mejor(...) llamando peor la que lleva a ser más injusto y mejor la más justa" (618 c-e). Sócrates resuelve así en modo elegante el dilema entre la fatalidad y la responsabilidad humana, diríamos nosotros entre el determinismo y el libre albedrío; pero lo que queremos hacer notar es que él llama ciencia al instrumento por el cual el hombre adquiere

esa capacidad de elegir; pero esta ciencia no es la misma a la cual nosotros, sin diferenciarnos en esto de los mismos griegos, damos este nombre; con ella es que (533 d-e) "el ojo del alma sepultado verdaderamente en el barro de la barbarie, paulatinamente se levanta, sirviéndose de las artes (...) que nosotros repetidamente, por la costumbre, hemos llamado ciencias, pero que necesitarían otro nombre, más insigne ciertamente que el de opinión, pero más obscuro que el de ciencia, y que antes hemos dicho raciocinio". Una de estas artes por excelencia es, como veremos, la Geometría.

Quiero detenerme todavía en otro ejemplo sobre el cual la lectura de Platón a la manera de vida novelada alumbra del modo más vívido el conflicto existente entre las escuelas filosóficas griegas del cuarto y quinto siglo a. C. en la concepción de la Geometría. Me refiero todavía al trozo de la *República* (Libro VIII, 546) que constituye para los comentadores un verdadero rompecabezas matemático. Dice Sócrates: "Ahora las cosas que han sido generadas por Dios tienen un período que está comprendido por un número perfecto, y la generación humana uno en el cual progresiones de raíces y potencias, con tres intervalos y cuatro términos semejantes y diferenciantes, excedentes y deficientes, proporcionan un resultado enteramente proporcional y racional. De éste la primera relación epitrita, triplicada combinada con el número cinco, da dos armonías, la primera representada por un cuadrado, cien por cien, la otra igual por un lado a ésta, pero rectangular y formada por cien números obtenidos del cuadrado del diámetro racional del número cinco, disminuido, cada uno en una unidad, o bien irracional disminuido cada uno en dos unidades y de cien

cubos del número tres" [6]. La explicación matemática o seudomatemática sería la siguiente: el número de la generación divina sería, según la tradición pitagórica el $6 = 1 + 2 + 3$ (número perfecto, es decir suma de sus divisores); el número humano sería el cubo $6^3 = 216 = 3^3 + 4^3 + 5^3$; las progresiones de raíces y potencias serían: 2 : 4 : 8 , 3 : 9 : 27 , 6 : 36 : 216 ; la razón epitrita sería 3 a 4 según Fraccaroli y 4 a 3 según Maggi [7], el cual declara uniformarse con su interpretación a otra ya universalmente aceptada de Jowett; las armonías serían según las distintas interpretaciones 10.000, y 2.500 ó 7.500 a través de unos cálculos sobre los cuales no vale la pena detenerse.

---

[6] Debo hacer notar que, en este tramo, la traducción de Fraccaroli que, como ya dije, estoy siguiendo, ha sufrido la corrección de un matemático, Gian Antonio Maggi. Para facilitar la interpretación, ya Fraccaroli habría introducido en el fragmento algunas palabras que no se encuentran en el texto griego, muchas de las cuales yo he suprimido en la retraducción, por cuanto me parecieron innecesarias; por mi ignorancia del griego, es la única modificación que pude hacer para garantizar mayormente la fidelidad; pero resulta también que la corrección de Maggi, guiada por la interpretación matemática, ha modificado bastante la primitiva traducción, probablemente más literal de Fraccaroli, en el último período, a partir de "De éste la primera relación epitrita...", que en dicha primitiva traducción seguía así: "...conjuntamente con 5 elevado a la tercera potencia da dos armonías, la primera cuadrada, multiplicada por cien, la otra por un lado de la misma longitud y por el otro oblonga de cien números construidos en cuadrado sobre la diagonal racional que tiene 5 de lado, restando uno en cada cuadrado y dos sobre la diagonal irracional, y de cien cubos de tres".

[7] Ver la nota anterior.

Pero, si renunciamos a resolver el rompecabezas numérico y en cambio leemos el pasaje completo al cual pertenece el tramo citado, he aquí el significado que se revela: Sócrates había explicado su propio programa de organización de la República fundada sobre la educación de ciudadanos fuertes, cultos y exentos de intereses personales; era luego un régimen de *aristocracia* (gobierno de los buenos), y estaba por empezar la crítica de los regímenes existentes –*timocracia, oligarquía, democracia, tiranía* (de los ambiciosos, de los pocos, del pueblo, de los reyes)– y Sócrates sabía que lo menos que se le oponía era la imposibilidad de realizar los propósitos de su prédica; ya antes de empezar se había defendido observando que, aun cuando debiera considerarse irrealizable la ciudad de su imaginación, valía la pena describirla; y concluía ahora la descripción afirmando que tal ciudad habría sido, en su constitución, inquebrantable. Pero, de pronto, le aparece delante la incredulidad de sus adversarios y a ella ajusta el discurso: "¿Cómo, por tanto, querido Glaucón, podría nuestro régimen quebrantarse, y cómo discordarían los auxiliares y los magistrados recíprocamente y con ellos mismos? ¿Quieres pues que, como Homero, pidamos a las Musas *cómo primero nació la discordia*, y las hagamos hablar trágicamente de manera solemne, casi como si fuera en serio, mientras al contrario juegan con nosotros como se hace con los niños, provocándonos? Más o menos así: es difícil por cierto que una ciudad así constituida pueda quebrantarse; mas, por cuanto cada cosa que nace tiene su corrupción, tampoco esta constitución va a durar para siempre, sino que se disolverá. Y la disolución ocurrirá de la manera siguiente: no solamente para los árboles que están plantados en el suelo, sino también para los

animales que se mueven sobre la tierra hay fertilidad y esterilidad del alma y de los cuerpos, cuando cada especie termine su propio giro y reanude su órbita, corta para lo que tiene vida corta, y al contrario en caso contrario" (545 d-e, 546 a). No es necesario esfuerzo de inteligencia alguno para percibir el tono de chanza en este solemne preámbulo profético, pues el mismo Sócrates ha tenido cuidado de avisarnos para que no lo tomáramos en serio; pero el lector notará en la broma la alusión a la corrupción y a los retornos con palabras casi idénticas a las que leímos al principio del resumen histórico del aristotélico Eudemo o del neoplatónico Proclo. Si el filósofo Platón aceptara la teoría, no es cosa que queramos juzgar; pero seguro es que no lo hace el novelista, cuando se identifica con su personaje del momento. Sigue todavía el paso del diálogo: "Ahora la fecundidad y esterilidad de vuestra especie, por mucho que sean sabios los que habréis educado por guías, no por eso podrán obtenerla con el razonamiento conjuntamente con los sentidos, sino que éstos escaparán a su dominio y a veces engendrarán hijos cuando no conviene. Aquí se junta el trozo matemático que hemos referido, para continuar: "Ahora bien, todo este número geométrico tiene la facultad de dirigir las generaciones mejores y las peores; y, cuando los custodios (de la ciudad) no la conozcan y junten las esposas a los esposos fuera del tiempo, no tendrán hijos ni bien constituidos ni felices...". Compare el lector con las reglas para asegurarse una vida justa y feliz, que hemos reportado del último libro del diálogo; recuerde la advertencia del mismo Sócrates al principio del pasaje, y deberá concluir que la charla puede bien estar como ironía contra sus opositores, pero no como expresión de su pensa-

miento verdadero; que el trozo matemático no pertenece a la ciencia (o raciocinio) en que él cree, sino que es una imitación probablemente caricaturesca de la mística numérica de los pitagóricos y que un análisis menudo para resolver el rompecabezas tiene más probabilidad de proporcionarnos una invención preciosa que una información para la historia científica[8]. Sin embargo, si el tramo no es más, por su sentido intrínseco, que un abracadabra matemático, algo puede enseñarnos por los vocablos; números perfectos, números (o razones) semejantes y diferentes, excedentes y deficientes, diámetro racional e irracional. Ya dijimos el significado del primer término; números excedentes y deficientes son los que son mayores y respectivamente menores que la suma de sus divisores (2, 4, 8, 3, 9, 27 son excedentes; 36 y 216 deficientes); el diámetro racional y el irracional –esto es, expresable y no expresable– se refieren a la aparición de la irracionalidad (en nuestro sentido actual) de la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles (diámetro del cuadrado), de la cual tendremos que hablar más adelante. Ahora bien, toda esta terminología, perfectamente adaptada a los

[8] La inutilidad de insistir en acumular hipótesis para resolver el rompecabezas ya fue afirmada por P. Tannery al final de un artículo publicado en la *Revue des Études grecques*, t. XVI (1903) (Mémoires scientifiques, t. III) con el título "*Y a-t-il un nombre géométrique de Platon?*". Tannery admite sin embargo que el problema de interpretación existe, pero nos faltan indicaciones suficientes para intentar la solución; podemos admitirlo nosotros también porque esto viene a decir únicamente que, fuera o no fuera la opinión del autor la misma que él nos representa como la del maestro, la crítica o el desprecio de éste estaban dirigidos contra algo real.

juegos combinatorios con los números, ha desaparecido casi completamente en Euclides, quedando solamente el número perfecto, por presentarse en un interesante teorema de teoría de los números al final del Libro IX de los *Elementos*. Como hecho positivo, la alusión al diámetro racional del cuadrado de lado 5 nos informa sobre el conocimiento, en el tiempo de Sócrates, del valor aproximado 7/5 para la raíz de 2, pues la diagonal (diámetro) del cuadrado de lado 5 vale $\sqrt{50}$ (inexpresable) y su cuadrado se aproxima por defecto en una unidad al cuadrado de 7, esto es 49. Con la alusión socrática, o quizá más bien platónica, toma el autor la oportunidad para poner en evidencia el hecho, que pudo parecer notable como signo de gran aproximación, de que el cuadrado de la diagonal racional difiere en menos de una sola unidad del cuadrado de la irracional.

Cerramos la digresión, que ha resultado quizá un poco larga. Volviendo a las reflexiones generales sobre el razonamiento socrático, nos parece todavía importante llamar la atención sobre una característica esencial: mientras, como notamos, Timeo (el pitagórico) nos ofrece una representación y una interpretación más o menos acabada de nuestras experiencias sensibles –un sistema del mundo–; y mientras en la Teoría de las Ideas, sea ella de Platón o de Parménides, podemos ver una interpretación del modo como tal representación, en cuanto referimiento de lo sensible a lo pensable, resulta posible –un sistema del conocimiento–; descenso de lo general a lo particular, que encontrará su opuesto, con Aristóteles, en el ascenso de las nociones particulares a las generales; Sócrates no tiene sistema, sino solamente un método –disección y análisis–; por eso todos los diálogos

socráticos terminan en suspenso, porque sin teoría y sin sistema faltan palabras para expresar conclusiones. Qué pensara Platón de estas diferencias, que tan claramente nos representa, no va a interesamos particularmente. Si miramos el desarrollo secular del pensamiento debemos reconocer que los alumnos de Sócrates son siempre minoría; que la mayoría de los pensadores, hoy y probablemente en todos los tiempos, ha propendido preferentemente por Timeo o por Aristóteles; con variantes en las esfumaduras se admite universalmente que el verdadero interés proviene de lo real y que de muchos particulares se origina lo general y que a partir de la observación experimental se forma el concepto; se afirma y se admite universalmente el origen práctico de la Geometría –que muchos modernos dijeron era la rama más baja de la física– y lo mismo vale más generalmente para toda la matemática. Hemos visto que lo afirma explícitamente Proclo; pero será importante para nosotros notar que el asunto parece no interesar a Euclides, porque ninguna alusión al respecto contiene su obra. Y si observamos que no solamente Proclo, sino la mayoría de los tratadistas de hoy parecen tener como tema obligado para las primeras páginas de cualquier libro elemental de Geometría o de Aritmética alguna alusión acerca de la formación experimental y práctica de los conceptos de punto, número, etc., el silencio de Euclides deberá parecernos más bien una propensión en contra.

Notaremos entonces una muy expresiva contradicción entre esa opinión tan generalizada, ese axioma didáctico de todos los tiempos, esa confianza universal en la directa adherencia entre el adelantamiento de los conceptos matemáticos y las necesidades prácticas de las otras ciencias de la naturaleza

y el hecho de que por tantos siglos los *Elementos*, o más frecuentemente algunas reducciones de ellos, más o menos respetuosas según los momentos, hayan constituido el fundamento de la enseñanza geométrica. Esta contradicción se resume en la admirada conclusión de Tannery antes recordada.

En efecto, el conocimiento geométrico, matemático en general, no es en ningún modo prerrogativa griega; los historiadores nos dicen que todas las más antiguas civilizaciones, anteriores en milenios a la obra de Euclides, tuvieron entre sus aportes algo que, desde el punto de vista de los conocimientos prácticos, coincide perfectamente con los principios de la Geometría, de la Aritmética, del Álgebra. Toda persona culta ha oído hablar de problemas y de cómputos contenidos en papiros egipcios; desde fines del siglo pasado es conocido todo un conjunto de teoremas y construcciones geométricas extraídos de los *Sulba-sutras*, colecciones de reglas para la construcción de los altares de los antiguos hindúes, y más recientemente las excavaciones de Babilonia han dado a luz unos millares de tablas de ladrillo referidas a dos o tres mil años antes de Euclides, en las cuales se pudo leer un verdadero tratado de Geometría, Aritmética y Álgebra, comprendiendo ecuaciones de segundo y aun de tercer grado...; nada sin embargo que vaya más allá de la curiosidad histórica.

La característica común de todos estos hallazgos es el teorema de Pitágoras –conocido y utilizado generalmente sólo para algunos triángulos particulares de lados enteros y con preferencia para el triángulo 3, 4, 5–; enunciado sin embargo a veces en forma general, pero sin indicación de demostración. Igual sucede con el teorema del gnomon (principalmente para el paralelogramo rectángulo, ver fig.1), que

afirma la equivalencia de las figuras análogas puestas a los dos lados de la diagonal; noticia ésta muy fácil de obtener por vía

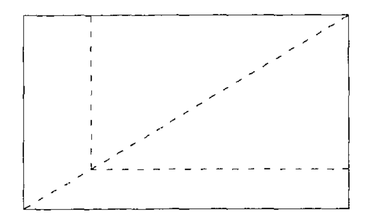


Fig. 1

intuitiva-experimental y empleada desde tiempo antiquísimo para mejorar la evaluación de la raíz cuadrada bajo la forma

$$\sqrt{a^2 + \alpha} = a + \frac{\alpha}{2a}$$

Por fin, los cálculos algebraicos desarrollados para casos particulares de combinaciones o de aproximaciones numéricas; y es esta particularidad que nota Tannery, aun refiriéndose a otro momento histórico, cuando habla de Aritmética y Geometría.

En la "Correspondencia" a la cual se refiere la memoria de Tannery aprendemos que alrededor del año mil (estamos luego nuevamente a más de mil años de distancia de Euclides, pero esta vez, más de mil años después) dos clérigos alemanes disputan entre sí con fines probablemente no desinteresados en relación a una carrera académica, y para dar muestra de erudición eligen como objeto de discusión cuestiones geométricas. Ellos saben, probablemente por Boecio o por algún otro comentario sobre Aristóteles, que ha existido un sabio llamado Euclides y conocen de oídas algu-

nas proposiciones: la suma de los ángulos internos de un triángulo vale dos rectos; pero ¿qué será un ángulo interno? Después de emitir algunas opiniones sin sentido geométrico debido a que no entienden que lo "interno" no es adjetivo sino en relación al triángulo, abandonan el asunto y pasan a la diagonal del cuadrado de lado uno. ¿Cuál será la longitud de esta diagonal? Uno afirma que es 7/5, probablemente por haberlo leído también en un resumen aristotélico, pues éste es el valor del *diámetro racional* del cual hablamos hace poco; pero el otro contesta que, según Boecio, esta longitud sería 17/12; se trata en efecto de un valor por exceso, debido a que la suma de los cuadrados de dos lados de longitud 12 es 288 y el cuadrado de 17 es 289. Pero ninguno de los dos tiene noción de esto y abandonan la discusión sobre la base de que la diferencia de los dos valores es imperceptible. El autor del *Sulba-sutra* sabía algo más, porque, probablemente por aplicación del teorema del gnomon, ya había perfeccionado el 17/12 en

$$\frac{17}{12} - \frac{1}{12\times 34} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 4} - \frac{1}{3\times 4\times 34};$$

sin embargo, tampoco él tenía noticia de la no-expresabilidad racional.

La matemática, guiada por el simple pensamiento experimental y de aplicación, se estanca delante de las ilusiones de la aproximación y delante de la multiplicidad de los caminos que prácticamente llevan al fin inmediato, pero que allí terminan sin posibilidad de prosecución. Le es necesario, para elegir la vía hacia el universo desconocido, olvidar el fin inmediato y subir la montaña de la inteligencia, del análisis.

En los párrafos 11 a 14 del Libro VII de la *República* (pp. 530-534) define Sócrates el justo proceder filosófico y los fines de ello: "Yo quisiera mostrarte no solamente una imagen de lo que hablamos, sino la misma verdad, por lo menos como ella me parece; que lo sea verdaderamente o no lo sea, no cabe el caso de querer sostenerlo, pero que ciertamente debería ser algo semejante, esto sí lo sostengo (...) Unicamente el método dialéctico procede por esta vía, derecho al principio para ponerlo sobre buen fundamento; y ese ojo del alma que está sumergido verdaderamente en un pantano de barbarie llanamente lo tira y lo levanta sirviéndose de las artes que hemos examinado como colaboradoras y cooperadoras (la Geometría, la Astronomía y la Música); las que para seguir la costumbre hemos llamado ciencias, pero que merecen otro nombre, más noble que opinión, pero menos brillante que el de ciencia y que arriba hemos definido por raciocinio. Pero para quien se ha propuesto una investigación sobre cosas tan excelsas como las que nos están delante, no me parece que la cuestión pueda estar en el nombre (...) Y aun, ¿no llamas tú dialéctico al que da la razón de ser de cada cosa? (...) Luego, lo mismo será también para el bien: quien no sepa definir por el razonamiento, separándola de todas las otras, la idea del bien, y, como en lucha, pasando a través de todas las pruebas, con el fin de demostrarla, no según opinión sino según la realidad, no recorra el camino a lo largo de todo este procedimiento con discurso invulnerable no dirás que conoce, no ya el bien en sí, sino tampoco ninguna cosa buena; y que, aun cuando de esto aprenda alguna sombra, la habrá aprendido por la opinión, pero no por la ciencia (...)." (533-534).

Poco antes, cuando todavía Sócrates no había alcanzado la tensión del discurso para inducirlo a cambiar el nombre de

ciencia en arte, y seguía todavía con la costumbre, había ridiculizado a los pitagóricos por fundar únicamente sobre directas experiencias con las cuerdas sus descubrimientos sobre las relaciones armónicas: "Midiendo en efecto las consonancias como son percibidas por el oído y los tonos, hacen, como los astrónomos, una fatiga inútil que no alcanza a nada (...) Ellos buscan aquellos números que corresponden a las consonancias que se advierten, pero no remontan a los problemas, a examinar cuáles son los números que dan consonancia y los que no la dan y por cuál razón los unos sí y los otros no (...)" (531). Cuando leemos la contestación de Glaucón: "Tú hablas de cosa sobrehumana" y notamos que la teoría físico-matemática del sonido y la identificación de los armónicos en el número de vibraciones son conquistas de menos de dos siglos, no podemos menos que quedar asombrados del valor profético de la filosofía intelectiva de Sócrates. ¡Una página antes, hablando de la astronomía, le había impuesto el problema de la Mecánica celeste, que fue tarea de Newton! " (...) estos bordados del cielo, por cuanto están en lugar visible, deberán bien considerarse como los más bellos y los más perfectos de ese género; pero en mucho inferiores a los verdaderos, donde (se ve) la velocidad verdadera y la verdadera lentitud, en el número verdadero y en todas las formas y movimientos verdaderos (en que) son respectivamente arrastrados y arrastran lo que contienen. Cosas éstas que bien pueden comprenderse con el discurso y con el pensamiento; pero no con la vista"(529 d-e).

No quiero olvidar que nuestro tema es la Geometría; me pareció sin embargo necesario alejarme un poco de ella porque la tesis que vamos persiguiendo es verdaderamente más

amplia; nunca tomaremos a Sócrates como maestro de matemática y, por otro lado, parece que el ángulo bajo el cual hemos examinado el diálogo platónico ha pasado desapercibido a muchísimos comentadores.

La Geometría, con el cálculo, es efectivamente la primera ciencia-arte que Sócrates considera en su discusión, porque su tema principal es la educación de los futuros custodios de la ciudad y evidentemente, ya fuera una costumbre reconocida o ya se trate de una ordenación platónica conservada hasta nuestros tiempos, la clasificación de las ciencias no difería entonces esencialmente de la nuestra.

Cuando Sócrates sugiere a su interlocutor, Glaucón, esta necesidad de enseñar geometría a los futuros defensores de la ciudad, éste, que representa aquí la parte de la opinión común, aprueba enseguida por el servicio que su conocimiento podría proporcionar en la maniobra de los ejércitos. Contesta Sócrates: "Para ese fin podría bastar una parte bien pequeña, sea de la Geometría, sea del cálculo; la parte importante que se necesita examinar es si ella, la Geometría, no tiende a hacer ver más fácilmente la idea del bien. Y dijimos que a esto tienden todas aquellas cosas que obligan al alma a mirar donde uno se complace de la perfección de lo que es... Pero ¿no le será denegado este oficio por los que pretenden tener práctica con la Geometría y que siempre en vista de la práctica hablan de construir cuadriláteros, circunscribir e inscribir figuras, mientras esta ciencia debe ser cultivada únicamente como fin de conocimiento?... Remolque del alma por tanto debería ser ella hacia la verdad e impulso al pensamiento filosófico para tener alto lo que ahora indebidamente tenemos bajo... Y también sus accesorios no son indiferen-

tes... aun para todas las otras disciplinas, para poder aprenderlas mejor, sabemos bien cómo difiere en todo quien sea versado en la Geometría y quien no" (527).

El programa geométrico de Sócrates no es pues una novedad absoluta. Hay geómetras, y son mayoría ciertamente, porque Sócrates es minoría y excepción, como lo dice su muerte y como lo dice él mismo las muchas veces que expresa desconfianza para hacerse entender por completo: "No todavía, querido Glaucón, serás tú capaz de seguirme, aunque por mi parte no es que falte la buena voluntad..." (533 a); una mayoría de geómetras, decíamos, que entiende la Geometría como un arte para resolver problemas más o menos prácticos. Para éstos podía ser instrumento principal, ya lo notamos, el teorema de Pitágoras y el trazado de curvas por puntos o por movimiento continuo con instrumentos variables según la oportunidad; quizá un ejemplo notable lo veamos pronto en el intento de Hipócrates para cuadrar el círculo. Pero, por las últimas palabras que hemos reproducido, no podemos dudar de que existe una escuela que mira a la Geometría como una audacia del espíritu, remolque del alma hacia la verdad e impulso al pensamiento filosófico.

Para hacer una pequeña inducción sobre quienes componen esa escuela, volvamos a la *República* pocas páginas atrás (525 e-526): "Tú sabes que los maestros en estas cosas, si uno en el razonamiento intenta romper la unidad matemática, se burlan y no lo admiten, sino que donde tú piensas en romperla, ellos la multiplican, teniendo cuidado de que lo uno nunca pueda aparecer no uno, sino muchas partículas (...); ellos hablan de los (números) que únicamente se pueden concebir, pero no es posible manejar de otra manera".

Giuseppe Fraccaroli, tomando las palabras al pie de la letra, comenta: "de quien quisiera dividir la unidad, ellos se burlan: ¿tú te diviertes en dividir? ¡Y yo en multiplicar!". No ciertamente; Sócrates no ha cargado la burla con la palabra "tú te diviertes"; todo lo contrario, al añadir las palabras "no lo admiten" ha expresado claramente una determinación racionativa. Para entender cuál puede ser, debemos recordar que en el libro V de Euclides se encuentra una teoría de las proporciones entre magnitudes construida exclusivamente por multiplicación; y lo mismo hace Sócrates las pocas veces que introduce en sus razonamientos un ejemplo geométrico concreto, siempre el mismo, la comparación del lado y la diagonal del cuadrado; luego, es razonable interpretar las palabras de Sócrates como una concreta alusión a las teorías de sus amigos y discípulos matemáticos. No ciertamente a que, como a veces se dice, "los griegos" desconocieran los quebrados o los excluyeran de la dignidad científica. En el texto citado debemos entender que aquellos mismos que a la Geometría acudían como a un instrumento para resolver problemas más o menos prácticos debían tratarlos sin recelo, porque sabemos que con quebrados calcularon todas las demás civilizaciones antiguas y con quebrados calcula corrientemente Arquímedes, el geómetra máximo del tiempo que sigue inmediatamente al que consideramos y que por eso pudo asociar la formación teórica de los *Elementos* con la práctica aplicación; y bien puede Sócrates indicar con generalidad a los que rechazan el uso de los quebrados como "los maestros en estas cosas" cuando en efecto habla a un alumno devoto, en todo dispuesto a despreciar lo que contrasta con la opinión del filósofo. Tampoco es necesario suponer

una oposición apriorística de naturaleza lógica contra el fraccionamiento de la unidad. Podría ser exacta esa explicación cuando fuese referida a un filósofo sistemático, Platón u otro; no lo parece en cuanto se refiere a Sócrates que, como hemos dicho, no tiene sistema y, en efecto, poco antes nos había dicho (525 a): "una misma cosa la vemos como una y como infinita en número (...) y, como el uno, cualquier otro número se encuentra en el mismo caso". Luego, todo nos parece indicar que Sócrates se refiere a la necesidad en que la noción reciente de lo irracional había puesto a ciertos matemáticos filósofos de rechazar los quebrados en la teoría de la proporcionalidad, utilizando la multiplicación como única operación. Nosotros personificamos en Eudoxo a aquellos matemáticos [9]. Cosa notable, en muy tardío Renacimiento, hacia 1658, Alfonso Borelli publica un *Euclides restitutus* del cual declara como principal mérito [10] la renovación de la teoría de las proporciones, utilizando los submúltiplos en vez de los múltiplos; y el ejemplo fue seguido después casi universalmente y recoge todavía hoy las preferencias didácticas; correspondía la reforma a las necesidades del tiempo, al

---

[9] Nótese que, siguiendo la cronología, a la muerte de Sócrates, Eudoxo podía ser un niño de 7 u 8 años; pero ya dijimos que no buscamos hacer cronología; tampoco está documentado que sea verdaderamente Eudoxo el inventor del método y en todo caso no hay contradicción en pensar que entre la aparición de una idea y su sistematización puedan haber pasado unos decenios; poco más adelante tendremos que notar una transposición análoga hablando de Theetetes.

[10] *Euclides restitutus sive prisca geometriae elementa, brevius et facilitus contexta, in quibus precipue proportionum theoriae nova, firmiorique methodo promuntur.*

desarrollo de la Física, del Álgebra, del cálculo infinitesimal. Pero la posibilidad de ella sin obstaculizar el progreso de la matemática, depende de haber sido precedida por el procedimiento eudoxiano y de que la noción de lo irracional estaba definitivamente arraigada en la matemática.

Con lo dicho arriba estamos lejos, hay que repetirlo, de representarnos un Sócrates matemático; es verdad que en el diálogo *Theetetes*, Platón, después de hacerle preguntar al joven Theetetes si con Theodoro aprende Geometría, Astronomía, Armonía y Cálculo, le hace añadir: "Yo también me pruebo en eso; y no solamente con Theodoro, sino también con otros que yo crea que de estas cosas entienden algo. Y para lo restante me saco bastante bien de dificultades (...)"; pero se trata únicamente de una media verdad, que sería bien justificada en el diálogo aun si no tuviera otra razón que la de no perder autoridad en el primer encuentro con un adolescente que de esas cosas entendía efectivamente algo y que resulta por otra parte más cierta, en razón de lo que dijimos antes, si la interpretamos como afirmación del trato y comercio intelectual que Sócrates hubo de tener con matemáticos de su tiempo.

En cuanto a conocimientos matemáticos positivos, si debemos juzgar de los diálogos platónicos y no queremos cargar sobre el autor las deficiencias aparentes del protagonista, estaríamos conducidos por el contrario a pensar que ellos fueran muy reducidos y limitados a las mismas proposiciones pitagóricas; pues no solamente en el caso que antes hemos considerado, en el cual esa limitación estaría incluida a propósito por la ironía en el trozo matemático, sino también cuando aparece efectivamente el ejemplo geométrico, parece que Sócrates no sabe alejarse del teorema de Pitágoras y del trián-

EVCLIDES RESTITVTVS,

Siue

PRISCA GEOMETRIÆ ELEMENTA,

Breuiùs, & faciliùs contexta,

In quibus prçcipuè

PROPORTIONVM THEORIÆ noua, firmiorique Methodo promuntur

A IO: ALPHONSO BORELLIO

in Messanensi pridem, nunc verò in Pisana Academia Matheseos Professore.



Pisis, ex Officina Francisci Honophri. 1658. *Superiorum permissu.*

gulo rectángulo isósceles. En el *Menón*, para demostrar que nada se aprende de la experiencia y de las enseñanzas de otros, sino que sólo se llama a la memoria lo que está olvidado en las profundidades del alma, Sócrates llama a un esclavo inculto y lo lleva con preguntas a resolver, por la reflexión y la intuición, el problema de la duplicación del cuadrado. Empieza haciéndole notar, por simples razones de simetría y de razón suficiente, cómo las medianas de un cuadrado lo dividen en cuatro partes iguales y simétricamente dispuestas alrededor del centro, que son luego cuatro cuadrados. En este punto comienzan algunas pruebas aritméticas: si el cuadrado dado tiene lado de 2 pies, ¿cuán será el largo el lado del cuadrado doble? ¿Acaso 4 pies? No, porque el cuadrado de 2 es 4 y el cuadrado de 4 es 16, mientras que el doble de 4 es 8. Tampoco será ese lado 3 pies, porque el cuadrado de 3 es 9. Sócrates vuelve entonces al examen de la figura: la diagonal del cuadrado lo divide en partes iguales. Si entonces formamos con cuatro cuadrados iguales el cuadrado cuádruple (ya desde el principio la consideración de las medianas del cuadrado preparaba esta consideración, en sentido inverso), luego, trazando las diagonales, de cada uno de estos cuadrados tomamos sólo la mitad, habremos formado, con estas diagonales como lados, el cuadrado doble.

Sin embargo, aun si el contenido matemático del ejemplo es demasiado simple, resulta evidente que lo que interesa a Sócrates es el método deductivo, partiendo de proposiciones cuyo contenido aparente es extremadamente simple e intuitivo. Poco después está declarado explícitamente: "Por tanto consiénteme que yo, por medio de suposiciones, considere si la virtud es cosa que se pueda enseñar o si es otra cosa; por suposi-

ciones como acostumbran hacer los geómetras. Pues, si alguno les preguntara acerca de una figura, por ejemplo si ese cuadrado puede colocarse en forma de triángulo dentro de un círculo dado, alguno de aquéllos le contestaría: 'Yo no sé, pero'...". Sigue una breve descripción, cuya interpretación, como el tramo de la *República* considerado antes, ha hecho escribir muchas páginas [11]. La hipótesis más simple y más conforme a la situación –porque debemos suponer que Sócrates se refiere a la misma figura que está delante de él, "ese cuadrado" que había sido dibujado en la conversación con el esclavo– es que él pensara cortar el cuadrado por una diagonal y llevar uno de los triángulos al lado del otro, por un cateto, formando así un triángulo rectángulo (ver fig. 2). Vendría de esta manera a aludirse a la inscriptibilidad del ángulo recto en el semicírculo, más o menos en la misma forma en la cual la encontramos recordada por Aristóteles. Sin embargo, debe notarse que no sería ésta la propia solución del problema propuesto, la que se obtendría transformando el cuadrado en triángulo equilátero. Si está fuera la solución pensada por Sócrates, demostraría un conocimiento matemático verdaderamente superior, aunque perfectamente posible en relación a la época, por cuanto todos los elementos para esta solución están en Euclides; pero tampoco en Euclides se encuentra resuelto un problema análogo, que incluye el concepto de mínimo y una relativa demostración, y el texto platónico no permite de ningún modo suponer eso.

---

[11] Pueden verse, por ej., en la colección de los *Mémoires scientifiques* de P. Tannery, dos trabajos escritos en muy larga distancia de tiempo (1876 y 1890) con el título común: "L'hypothèse géométrique du *Ménon* de Platon".

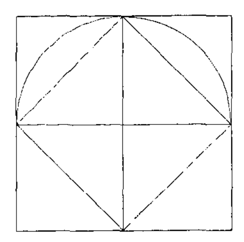


Fig. 2

Tenemos pues en nuestro examen, hasta aquí, una indicación muy precisa de los fines que Sócrates asignaba al estudio de la matemática; pero no suficiente para juzgar sobre el contenido esencial de ella.

Una luz decisiva va a proporcionarla el ya citado diálogo de *Theetetes* o *Del Conocimiento*, no más por la boca de Sócrates, sino del joven Theetetes. Intervienen en el diálogo, además de Sócrates, Theodoro de Cirene, del cual Theetetes aparece como alumno, en Atenas, y otro joven compañero de éste, Sócrates junior. Después de algunas réplicas, como Sócrates hace a Theetetes la pregunta: ¿Qué es conocimiento?, y éste le contesta con la enumeración de una serie de conocimientos particulares de origen empírico, Sócrates objeta que de nada sirve una enumeración para aclarar el concepto, que es único. De improviso responde entonces Theetetes:

"(...) Casi me parece que tú me presentas una pregunta semejante a la que se nos presentó a nosotros, yo y tu homónimo Sócrates, por cuanto estábamos discutiendo (...) Theodoro nos dibujaba ciertas figuras sobre las potencias de 3 y de 5 pies, demostrando que respecto de la longitud del lado no son conmensurables con la unidad del pie; y creciendo proseguía para cada una (de las potencias) hasta la de 17 pies. Allí

se había parado. Entonces a nosotros nos ocurrió algo parecido (a tu pregunta); puesto que las potencias son infinitas, nosotros tratamos de reunir en una única expresión todas las potencias (...) Dividimos todos los números en dos clases. Los que se expresan como productos de dos números iguales los comparábamos a la figura del cuadrado y los llamamos *tetrágonos* o *equiláteros*. Los que están entre aquéllos, como el 3 y el 5 y todos los otros números que no se expresan como productos de dos iguales, sino que resultan de la multiplicación de un número mayor por uno menor o de uno menor por uno mayor, parangonándolos con la figura de un rectángulo oblongo, los llamamos *números rectangulares* (...) Los segmentos que son lados de números planos y equiláteros los llamamos *longitudes*; mas los que son lados de números rectangulares los llamamos *potencias*[12] pues sus longitudes no tienen medida común

[12] La traducción de este fragmento sufre en los distintos autores variantes debidas parcialmente a detalles de interpretación que siempre se presentan al traducir del griego antiguo. Una de las palabras que en el caso presente ofrece mayor dificultad es la de *dynamis* (δύναμις), que, por influencia del significado técnico actual del correspondiente vocablo neolatino *potencia*, se traduce ordinariamente por *cuadrado*. Si esta traducción se aceptara en el lugar donde pusimos la llamada, resultaría un evidente contrasentido. A consecuencia de este relieve, P. Tannery (*Mémoires scientifiques*, vol. II, p. 93 y sig.) ha propuesto considerar en este lugar la palabra del texto como una corrupción y sustituirla por δυναμένη que significaría *potenciante*. H.-G. Zeuthen, al contrario, en *Notes sur l'histoire des Mathématiques* VIII (Acad. roy. des sciences et des lettres de Danemark, 1910) acepta la palabra *potencia* en este lugar y simplemente traduce por *cuadrado* al principio del fragmento donde nosotros conservamos la exacta traducción de

con aquéllos, pero sí las superficies que sostienen. E hicimos convenciones análogas para las cantidades estereométricas."

El tramo ha sido muchas veces discutido por los historiadores principalmente porque se ve en él un documento acerca del tiempo y de los hombres a los que corresponde la invención de la teoría de los irracionales; y de que eso sea cierto no es posible dudar. Pero para entrar en la interpretación de ese documento es necesario que anticipemos algunas consideraciones:

Aunque el diálogo sea imaginario como todos los demás, no son imaginarios los interlocutores, Theetetes y Theodoro;

---

potencia. Tenemos la impresión de estar en lo cierto considerando que originalmente la palabra δύναμις tuvo que ser entendida, aun en su aplicación técnica, lo más próxima posible al significado vulgar de *fuerza*, *poder*; entonces es razonablemente *potencia* el lado que sostiene el cuadrado (aun más que la palabra recuerda la cuerda). Y el tramo reproducido se lee entonces, tal como está escrito en los textos, sin ninguna contradicción: "Teodoro dibujaba ciertas figuras sobre los segmentos que son lados de cuadrados cuya área es 3 y 5 pies cuadrados (...); puesto que los lados de cuadrados (de área entera) son infinitos etc.". Lo que hace Theetetes se reduce entonces a conservar para la palabra *potencia* su significado general y aplicar un nombre particular, *longitud*, al caso especial de aquellas potencias que se miden en números racionales. Nótese que con esta interpretación resultan claras y naturales las expresiones como "igualdad *en potencia* " y análogas que se encuentran difundidas en todos los textos matemáticos griegos; bastará añadir la consideración de que, aun en el idioma corriente, se nota una dualidad entre la *fuerza* como *agente* y la *fuerza* como *cantidad de acción* que el agente puede proporcionar, para entender la sucesiva transformación del significado que de "lado del cuadrado" pasa a "cuadrado del lado" y luego a "exponente" y a "potencia" en el significado matemático actual.

de ellos habla Eudemo en su resumen histórico, poniendo al primero, conjuntamente con Eudoxo, entre los precursores inmediatos de Euclides, el cual habría principalmente perfeccionado la obra iniciada por ellos.

Del prólogo del diálogo se deduce que esto fue escrito después de la muerte de Theetetes, ocurrida en torno al año 369 por una enfermedad contraída en la guerra del Peloponeso. Platón habría dedicado el diálogo a la memoria del amigo muerto, como para elevarle un monumento (son palabras de Wilamowitz-Müllendorf); por lo tanto, la manifestación puesta en la boca de Theetetes tendría por fin indirecto recordar uno de sus más notables descubrimientos. Sin embargo, la acción está transpuesta alrededor del año 400, cuando Theetetes era un joven de 16-17 años; en efecto, la muerte de Sócrates ocurrió el año 399. Ahora, ¿cuál es el descubrimiento? Nos lo indica Sócrates con la demanda que sigue a continuación: "Toma como ejemplo tu contestación acerca de las potencias; y como éstas, aunque sean muchas, las incluiste en una única especie, así también los conocimientos intenta reunirlos bajo una única definición".

Theodoro había demostrado, construyendo sucesivamente de unidad en unidad los cuadrados cuya área se expresa por los sucesivos números enteros, que pueden construirse ciertos segmentos que son inconmensurables con el segmento de partida (unidad); Theetetes se había elevado a la noción general de que existe una clase infinita de segmentos inconmensurables con la unidad; aun más, ellos constituyen la regla y no la excepción, porque él asigna una condición característica para que un área tenga por potencia una longitud (segmento medible) –la de expresarse por un número

cuadrado, excluyendo los rectangulares y definiendo de este modo la clase de las potencias (irracionales). Sócrates propone imitar el ejemplo en otro caso.

Frente a la idea socrática, la demanda parece más bien un desafío. La característica general de la mayéutica es no concluir; por mucho que nos esforcemos en discriminar las funciones del alma, siempre llegamos a algo que no se presta a la definición en palabras; y el diálogo de *Theetetes* se desarrolla luego en varias tentativas persiguiendo la pregunta "¿qué es conocimiento?" que todas terminan en algún punto muerto.

Si examinamos la respuesta de Theetetes con ojo matemático, notaremos que la pretendida definición queda todavía inconcluyente, porque el joven matemático no podía ignorar que un mismo número podía considerarse a la vez como rectangular y cuadrado (ej. $36 = 4 \times 9 = 6 \times 6$). La respuesta resultará completa sólo después de haber demostrado que este caso es más bien la excepción que la regla, esto es, después de haberse construido la teoría de la descomposición en factores de los enteros y de los números primos. Por cuanto esta teoría está contenida en los llamados *libros aritméticos* de los *Elementos* de Euclides, podemos aceptar con Zeuthen que estos libros se deban precisamente a la obra de Theetetes y debemos suponer que sea ése el descubrimiento verdadero por el cual Platón quería inmortalizar la memoria del amigo, aun cuando no fuera él mismo matemático como para entender la dificultad que había tenido que sobrellevar. Pero debemos entonces admitir también que en este éxito viera algo más simple y más notable, es decir, el fruto de una interdependencia entre el pensamiento del matemático y la escuela socrática. Sólo en este caso podía no considerar como irreve-

rente hacia el matemático muerto la parte modesta de alumno que le asigna, no solamente en el diálogo *Del Conocimiento* sino también en el *Sofista*[13]. A esa interdependencia podía vincularse la abstracción que permitía separar la noción de *segmento* de su posible medibilidad y la aplicación del término *potencia* a una característica no mayormente definible que con la propiedad negativa de no ser longitud; una abstracción en todo comparable a la moderna invención del término *número real*. Como la mayéutica no llega a resolver el problema de la definición de los atributos esenciales del alma, así los *Elementos* de Euclides construyen, por primera vez, la Geometría fuera del dominio de los objetos físicos, sobre *ideas primitivas* (según el término moderno) que sólo actúan por sus propiedades explícitamente enunciadas (nociones comunes, axiomas, postulados, los que Sócrates llama repetidamente *hipótesis*).

[13] Es interesante notar que en el diálogo *Del Conocimiento* Theodoro, maestro de Theetetes, se disculpa de no intervenir en la discusión por no tener costumbre con ese modo de razonar; es sabio de pura educación pitagórica; salvo muy pocas palabras que sólo pueden servir para afirmar la presencia de otros personajes, la discusión se desarrolla enteramente entre Sócrates y Theetetes y sin volver ulteriormente a alusiones matemáticas. El diálogo del *Sofista* se desarrolla con la presencia de las mismas personas del anterior, con la única diferencia de que la dirección de la discusión, tenida antes por Sócrates, pasa al extranjero sofista, el cual se esfuerza en imitar el método socrático, cayendo, por el contrario, en un artificial análisis por división dicotómica. Nuevamente las respuestas están sostenidas por el joven Theetetes, el cual, en el primero secundaba a Sócrates, mientras en el segundo se limita casi exclusivamente a breves contestaciones por sí y por no, a veces aparentemente irónicas.

Notemos todavía un detalle: al establecer en la *República* una jerarquía entre las ciencias, Platón hace seguir a la Geometría la Astronomía; pero la Geometría de la que se había hablado entre Sócrates y Glaucón era la plana. Ya la conversación había tomado la nueva dirección y de improviso (528) Sócrates parece darse cuenta de haber olvidado la estereometría. Aun admitiendo en el fino arte platónico la intención de mantener en el diálogo un poco de naturalidad dramática, el aparente olvido entiende llamar la atención sobre las razones que enseguida se dicen para explicarlo: primero, la estereometría no ha sido todavía constituida; segundo, los pocos que de ellas se ocupan lo hacen en modo grosero y presuntuoso, cuando sería necesario que aceptaran un guía. Verían entonces que aun esta ciencia tiene su belleza y extraordinarios atractivos. Es bien manifiesto que el guía estaba claro delante del pensamiento de Platón y era probablemente el mismo Theetetes (también debe notarse que la crítica admite que en la cronología de los diálogos, el *Theetetes* sigue a la *República*); y los presuntuosos que hasta ahora se habían ocupado de estereometría eran los pitagóricos (ya vimos que Timeo, por la forma misma de su filosofía, está conducido a poner delante los poliedros; pero no sabe salir de groseras observaciones sobre las caras). Leyendo los *Elementos*, cualquiera se da cuenta de que la formación de los libros estereométricos (que, excluyendo la teoría de los poliedros platónicos y la de los cuerpos redondos, se reducen al XI) está mucho más atrasada que la de los libros planos (I a VI); pero también, si fija su atención los teoremas en planos y rectas perpendiculares o sobre la igualdad de los ángulos triedros no puede dejar de admirar la verdadera belleza de

cómo el geómetra ha sabido reducir a la geometría del plano las consideraciones espaciales. ¿Cuál es pues el modelo de Geometría que Platón supone tuviera Sócrates delante de sí? Desde luego, no es necesario suponer que el mismo Sócrates lo conociera verdaderamente; así como antes hemos reconocido una evidente transposición en el tiempo de los descubrimientos matemáticos de Theetetes, la misma transposición puede aceptarse aquí. ¡Es suficiente que quede actual el pensamiento filosófico que sirve de guía!

Si por un momento queremos despreciar este pensamiento filosófico y sólo interesarnos de los conocimientos geométricos positivos, la lectura de los diálogos platónicos nos confirma que el antecedente esencial de la geometría de Euclides fue la pitagórica, concretándose en la noción intuitiva de la semejanza, en el teorema de Pitágoras y alguna otra noción sobre equivalencia (teorema del gnomon) y en la noción, por casos particulares, de la irracionalidad. Las primeras nociones son ciertamente comunes con otras civilizaciones mucho más antiguas; la última es probablemente particular al pitagorismo y su mayor contribución reside en el dominio de la razón pura.

Detengámonos un instante en el valor de estos conocimientos. No debe extrañar que con los del primer grupo las antiguas civilizaciones hayan podido resolver los problemas más interesantes propuestos por la práctica, y aun determinados problemas que sobrepasaban estas necesidades para entrar en alguna forma de curiosidad científica. Basta observar, para vislumbrar una explicación, que ellos incluyen todo el fundamento esencial de la geometría cartesiana; y al decir esto no venimos a disminuir la geometría analítica, pues para

que ésta se desarrollara era necesaria la preparación instrumental constituida por el Álgebra y la preparación intelectual constituida por la costumbre con los razonamientos de la geometría euclidiana. Se entiende entonces que la reflexión, la intuición de algún ingenio particularmente dotado y también a veces alguna afortunada observación hayan podido llevar a las aludidas aplicaciones.

Un ejemplo interesante lo proporciona todavía el comentario de Proclo al habernos conservado noticia del tratado de Hipócrates sobre la *cuadratura de las lúnulas*. Hipócrates pertenece, como Theodoro, a la geometría pitagórica. Uno de los problemas que han ocupado en todos los tiempos a los interesados en cuestiones geométricas es el de la cuadratura del círculo; la invención por parte de Hipócrates de las llamadas lúnulas cuadrables se vincula precisamente a una intentona para resolver este problema. Según informa Aristóteles, una solución práctica del mismo habría sido propuesta también por el sofista Antifonte, contemporáneo de Sócrates, la cual consistiría en sustituir al círculo un polígono inscripto con un número suficiente de lados, y no se puede excluir que tal solución, que es totalmente grosera cuando está desvinculada de toda preocupación acerca de la aproximación, haya sido el punto de partida para la teoría de Eudoxo que encontramos en el Libro XII de los *Elementos* de Euclides.

Parece, en cambio, que Hipócrates persiguiera una solución constructiva que nosotros sabemos imposible y que ya se suponía tal en el tiempo de Aristóteles. No tenemos sin embargo elementos suficientes para determinar en qué medida Hipócrates estimara haber alcanzado ese fin, y el tratado de las lúnulas va a interesarnos, por el contrario, por lo que

contiene de geométricamente válido. Como dijimos, ese tratado nos ha sido conservado por Proclo, en una redacción debida a Simplicio, un escoliasta posterior al autor en siete u ocho siglos cuando menos; éste conocía por tanto también la obra de Euclides, y en la redacción aludida se ha preocupado por completar los razonamientos de Hipócrates con referencias a los teoremas de los *Elementos*; aun más, G. H. Zeuthen supone que el mismo Eudemo, sobre el cual Simplicio funda su redacción, ya habría introducido en el texto algún perfeccionamiento correspondiente al tiempo de su propia investigación. Para nuestro examen será luego necesario depurar en lo posible el texto de tales complementos y rellenos; vamos a ver cómo, en efecto, la invención hipocrática puede entenderse completamente sin referirse en nada a la sistemática euclidiana y sin desbordar de los conocimientos pitagóricos que arriba hemos recordado.

Una primera lúnula hipocrática es la circunscripta al triángulo isósceles rectángulo (ver fig. 3), y se obtiene restando de una semicircunferencia el segmento de amplitud 90° que tiene por cuerda el diámetro; la simple observación hace ver que este segmento es semejante a los dos comprendidos entre la semicircunferencia y los catetos del triángulo isósceles ins-

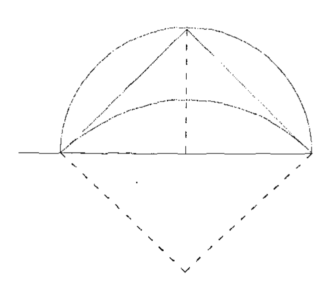


Fig. 3

cripto; y el teorema de Pitágoras y la noción intuitiva de que en figuras semejantes las áreas homólogas son proporcionales permiten concluir que el primer segmento es igual a la suma de los otros dos. Luego, la lúnula es equivalente al triángulo.

Una segunda lúnula es la circunscripta al trapecio isósceles en el cual tres lados son iguales y la base mayor tiene la razón 3 : 1 respecto de cada uno de ellos (ver fig. 4): según la terminología del tiempo, iguala en potencia la suma de dichos tres lados; se obtiene la lúnula restando del segmento de círculo circunscripto al trapecio un segmento que tenga por cuerda la base mayor y semejante a los cortados en el primero por los otros lados. El mismo razonamiento anterior conduce a afirmar que la lúnula es equivalente al trapecio.

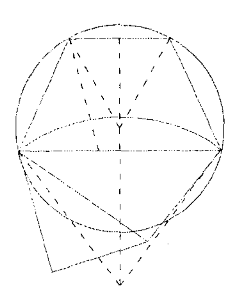


Fig. 4

Una tercera lúnula hipocrática responde a los mismos requisitos, con la diferencia de que, en lugar de un triángulo o cuadrilátero, se considera un pentágono cóncavo en el cual tres lados iguales forman una poligonal inscripta en el arco mayor de la lúnula, y los otros dos, iguales entre sí e inscriptos en el arco menor, son cada uno igual en potencia a 3/2 de los anteriores. Idéntico razonamiento al anterior asegura que el área de la lúnula es igual a la del pentágono.

Es fácil pensar que el procedimiento podría extenderse a lúnulas más complicadas, aumentando el número de los lados. La dificultad reside en obtener que las poligonales consideradas puedan inscribirse en arcos de círculos formando la lúnula, con la condición de que todos los lados sean cuerdas de arcos semejantes. Para las dos primeras lúnulas hipocráticas no hay problema, pues el triángulo y el trapecio isósceles son evidentemente inscriptibles (por razón de simetría) y al arco menor de la lúnula no se le impone otra condición que la de tener extremos dados. Pero para la tercera lúnula la situación cambia; las mismas razones de simetría permiten todavía afirmar la inscriptibilidad de las dos poligonales; mas la condición de semejanza de los arcos constituye una limitación que es necesario verificar *geométricamente*; la cursiva corresponde a que, cuando el número de lados pasa de 4, las condiciones de simetría e inscriptibilidad no son suficientes para determinar el polígono, aun conociendo la longitud de los lados; si entonces uno se diera por satisfecho con realizar la ulterior condición en modo mecánico por medio de una deformación continua, ya no habría mayor dificultad y la construcción de lúnulas equivalentes a polígonos de un número de lados tan grande como se quiera sería sin más alcanzada. La solución de Hipócrates es la siguiente:

Sea AB un segmento igual a los lados menores del pentágono (ver fig. 5); con centro en el punto A descríbase una circunferencia de radio AB; levántese la perpendicular a AB en el punto medio y sea la recta *r*; póngase un segmento igual al lado mayor del pentágono de manera que sus extremos CD estén respectivamente sobre la circunferencia y sobre *r* y que su prolongación pase por B; sea E el punto simétrico de C res-

pecto de *r*; ABEDC será el pentágono pedido. La conclusión es evidente por lo que se relaciona con la longitud de los lados y con las condiciones de simetría; luego también con la inscriptibilidad. Por otro lado, si se traza CE y se admite conocer algo sobre paralelas y sumas de los ángulos de un triángulo, o aun, diversamente, saber algo sobre ángulos inscriptos en una circunferencia, inmediatamente resulta también la semejanza de los triángulos ABC y DEC, y se comprueba por lo tanto que también la ulterior condición está realizada.

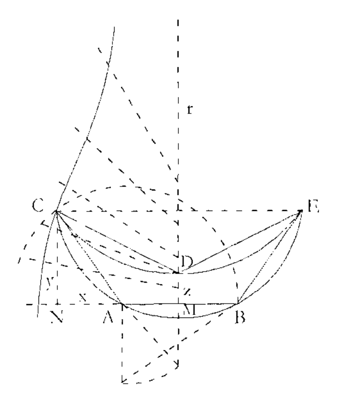


Fig. 5

Nada puede extrañar que, aun sin las demostraciones regulares de Euclides, Hipócrates conociera las igualdades de ángulos necesarias en la última parte de la demostración; pero nuestra atención debe detenerse en la determinación de la recta CDB por las condiciones de que CD tenga una longitud dada y la recta pase por el punto dado B. El problema, considerado dentro del marco euclídeo y suponiendo que la longitud dada de CD sea cualquiera, sin relaciones previas

con el segmento AB, no tiene solución; pero es de suponer que Hipócrates considerara por correcta una solución mecánica o por tanteos: representando CD por un asta rígida, no habría habido ninguna dificultad en colocar sus extremos sobre la circunferencia BC y sobre la recta r; de modo que el asta pasara por B; también podía Hipócrates trazar por puntos la concoide de r respecto de B y con distancia dada CD y encontrar el punto de intersección con la circunferencia.

Si se comparan tales procedimientos con la observación general hecha antes, de que las condiciones de semejanza podrían realizarse en modo mecánico, por deformación continua, el parentesco resulta claro; pero es evidente que Hipócrates tuvo la preocupación de hacer de lo mecánico lo más manejable, más simple y prácticamente realizable.

Sin mayores conocimientos que el teorema de Pitágoras (tomado como afirmación básica, sin exigir demostración lógica), Hipócrates hubiera podido resolver el problema de determinar el punto C por consideraciones algebraicas (de un álgebra no más elevada de la que conoce el mismo Euclides). Si en efecto trazamos CN perpendicular a AB, llamamos M al punto medio de AB (ver fig. 5) y escribimos

$$NA = x\,,\ CN = y\,,\ DM = z\,,\ AB = 2a\,,$$

sólo por consideraciones de semejanza y aplicación del teorema de Pitágoras, tenemos las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 4a^2$$
$$(x + a)^2 + (y - z)^2 = 6a^2$$
$$\frac{y - z}{x + a} = \frac{z}{a} = \frac{y}{x + 2a}\,,$$

de las cuales se eliminan en seguida *y* y *z*, obteniendo para *x* la ecuación

$$4x^2 + xa - 2a^2 = 0$$

es decir

$$2x + \frac{a}{4} = \frac{a}{4}\sqrt{33} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}a\right)^2 - a^2}$$

La observación sólo vale para confirmar lo que dijimos, que si en verdad no hubiera oposición entre el pensamiento empírico y la utilización racional de lo que a la práctica sirve, la resolución del problema por geometría analítica habría estado al alcance de Hipócrates. En oposición a los pensadores de la escuela de Euclides, el problema de las lúnulas, para cuya resolución ellos tenían todos los elementos (se encuentran en Arquímedes y aun en los *Elementos* transformaciones algebraicas más complicadas, expresadas en términos geométricos), tuvo que parecer un juego inútil y sin interés como lo es todavía hoy. Para nosotros, sin embargo, ha constituido uno de los muchos ejemplos del problema general acerca de las posibilidades de la geometría euclidiana: sin que Hipócrates lo supiera, las tres lúnulas encontradas por él eran cuadrables con los medios de Euclides; nosotros sabemos que hay todavía dos, y no más.

En relación con el descubrimiento de la irracionalidad por los pitagóricos la tradición es que, por lo menos en cierto tiempo o en ciertos ambientes, haya sido considerado como un monstruoso conflicto entre las sugestiones de la experiencia y las de la deducción lógica. Quien quiera referirse a las modernas y aun a las no modernas antinomias de la

lógica, o también a las antítesis entre determinismo e indeterminismo en las ciencias de la naturaleza, puede probablemente no estar equivocado en la comparación. Acentúa también la tradición el hecho de que tal descubrimiento habría sido revelado a los no iniciados de la secta pitagórica por Hipasos de Metaponto, el cual, a causa de este crimen, lo habrían matado los dioses o sus compañeros; pero, según nos informa Platón, en el tiempo de Theetetes el escándalo se había dilatado, porque los irracionales se habían presentado en cadena.

Es opinión ampliamente aceptada por los historiadores que el primer descubrimiento de la irracionalidad haya ocurrido con el número $\sqrt{2}$, o lo que es lo mismo, con la comparación de la diagonal y el lado del cuadrado; y que la demostración se haya fundado en la oposición entre *par* e *impar*; en efecto, una antigua demostración conservada por algún escoliasta de los *Elementos* es la siguiente:

Supongamos que la razón entre la longitud de la diagonal y la del lado del cuadrado pueda expresarse por $e : f$; deberá ser $e^2 = 2f^2$. Se sigue que no puede ser $e = 1$, porque esto implicaría $f < 1$, mientras f se supone un entero; más precisamente deberá ser e un número par porque es tal el segundo miembro, mientras se sabe que el cuadrado de un número impar es impar; sea pues $e = 2g$; será $e^2 = 4g^2$; luego $f^2 = 2g^2$. Siendo esta igualdad análoga a la primera, puede sobre ella empezarse nuevamente el razonamiento con f y g en vez de e y f; resultaría así un proceso de descenso que podría concluirse por inducción completa. Hay razón para suponer que los antiguos dijeran: en la razón $e : f$ los términos no pueden los dos ser pares, porque el factor común 2

desaparecería al agrupar las unidades en pares, pares de pares, etc.[14] Una vez admitido que e debe ser par, se sigue que será impar f; pero la igualdad $f^2 = 2g^2$ implica que debe ser par f. Hay luego contradicción.

La oposición entre par e impar parece haber jugado un papel considerable en la dialéctica de los filósofos griegos; ella es recurrente en Aristóteles y se encuentra frecuentemente comparada a la oposición entre finito e infinito; pero en el caso especial de la anterior demostración –o algo parecido– podría haber sido originada también sólo por la práctica del cálculo numérico; no se puede dudar, como lo notamos anteriormente, de que valores aproximados de la diagonal del cuadrado fueron obtenidos por tanteos, como indica Sócrates en el *Menón*, simultáneamente con el primer descubrimiento –no demostración– del teorema de Pitágoras; y estos tanteos venían a coincidir con las contradicciones del razonamiento anterior, aplicado a numeros particulares:

La diagonal del cuadrado de lado 2 no puede ser 3, porque $2 \times 2^2 = 8$ y $3^2 = 9$ (*Menón*); la diagonal del cuadrado de lado 5 podría parecer 7, pero no lo es porque $2 \times 5^2 = 50$ mientras $7^2 = 49$ (y $7 : 5$ es la *longitud racional* indicada por Sócrates, como ya vimos en la *República*); la diagonal del cuadrado de lado 12 podría parecer 17; pero no es así porque $2 \times 12^2 = 288$ mientras $17^2 = 289$.

Para imaginar cómo habría podido proceder Theodoro para demostrar la irracionalidad de las $\sqrt{n}$, para $n = 3, 5, 6, ..., 17$,

---

[14] Compárese con la definición euclídea de la razón entre números que examinamos más adelante (*Los libros aritméticos*).

la hipótesis que nos parece la más sencilla es que él hubiera generalizado la anterior en la forma siguiente:

Supongamos, si es posible, que e y f sean las longitudes enteras de dos segmentos de los cuales el primero sea igual en potencia a n veces el segundo; esto significa que $e^2 = nf^2$. Podemos excluir sin más que sea $e < n$; la misma exclusión se hacía en el caso de $n = 2$ al decir que no puede ser $e = 1$, porque no puede ser f menor que la unidad. Actualmente, para n determinado, bastará reconocer por cálculo directo que en ese caso no podría e^2 ser múltiplo de n. Es sabido también que el número de experimentos necesarios para esta averiguación no pasa de $(n - 1) : 2$; y la observación no habrá escapado ciertamente a los calculistas pitagóricos. Así:

para $n = 3$, $e = 2$, $e^2 = 4 = 3 + 1$
para $n = 5$, $e = 2$, $e^2 = 4 < 5$; no necesita experimentar:
$e = 3$ y $e = 4$, por ser: $3 = 5 - 2$, $4 = 5 - 1$
para $n = 6$, $e = 2$, $e^2 = 4 < 6$
$e = 3$, $e^2 = 9 = 6 + 3$; no necesita experimentar:
$e = 4$, $e = 5$ y así siguiendo.

Se excluye también en seguida la hipótesis de que e pueda ser múltiplo de n porque de $e = ne'$ sigue

$$e^2 = n^2 e'^2 = nf^2 \quad ; \quad f^2 = ne'^2 ,$$

que es la misma ecuación con números menores; si se hubiera supuesto $e' = 1$, ya está en la hipótesis que n no es número cuadrado.

Si ahora se supone e no múltiplo de n y mayor que n, podrá escribirse

$$e = ng + h \quad \text{con } h < n;$$

el teorema del gnomon da entonces en seguida

$$e^2 = ng\,(ng + 2h) + h^2;$$

y si $e^2 = nf^2$, resulta h^2 múltiplo de n, lo que fue excluido antes.

La demostración es realmente general, salvo lo que se refiere al primer paso que debe hacerse por cálculo directo; Theetetes habría suprimido esta dificultad y esencialmente acortado el camino mediante la descomposición en números primos. Pero ¿por qué Theodoro se habría parado en el número 17? Puede contestarse que en la comprobación directa en algún número había que pararse, y 17 es uno, ya bastante elevado. Una hipótesis un poco más sugestiva se encontrará también más adelante; mientras tanto notemos que la exposición anterior nos muestra que si se dispone de una tabla de cuadrados de los números menores o iguales a p se alcanza la demostración para todos los valores de $n \leq 2p + 1$; si en vez de detenerse en 17, Theodoro hubiera llegado a 19 ó 21, podríamos suponer como razón plausible que su tabla comprendía los cuadrados de la primera decena.

Cuando Tannery alude a una primacía de la Geometría respecto de la Aritmética debe entenderse entre razonamiento y cálculo numérico; debe entenderse un enfrentamiento entre la contemplación de nociones generales y la experimentación por casos particulares. No ciertamente por negarse la experimentación geométrica, la que quizá sea la más inmediata y primitiva por derivar en un inmediato contacto con los cuerpos materiales; sino que el nivel de ésta se halla por debajo del conocimiento científico estando sus conclusiones estrechamente vinculadas a la groseridad de los cuerpos. Por el cálculo se cumple la primera superación por la cual el intelecto

transpone los límites de la simple sensación; pero lo hace más bien por el ejercicio de la voluntad –repetición mecánica de determinadas operaciones– que por raciocinio. Hay una filosofía que, invirtiendo los términos, quiere suponer que las afirmaciones geométricas no tienen mayor categoría que una

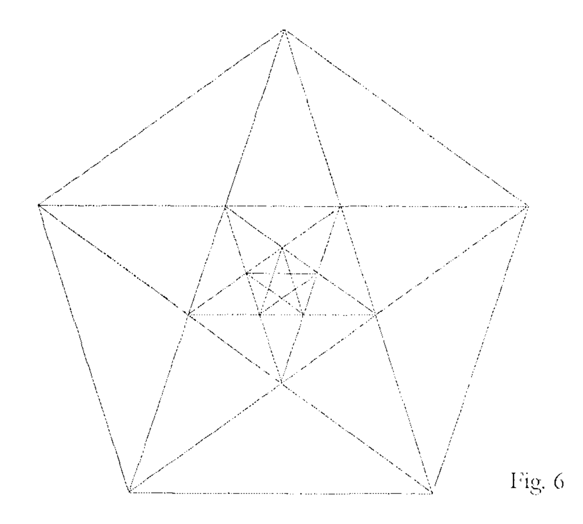


Fig. 6

buena catalogación de observaciones inmediatas por casos particulares. Desde este punto de vista se ha propuesto a veces que los primeros conocimientos sobre la inconmensurabilidad deberían haber resultado de haber fallado el esfuerzo de realizar la medida común de dos segmentos por el método de las divisiones sucesivas. Así, muy recientemente un apreciado crítico de la antigüedad griega, Kurt von Fritz,

en un estudio sobre Hipasos de Metaponto[15], por acercar la tradición ya aludida que le atribuye la divulgación de la antinomia encerrada en la inconmensurabilidad con la otra que le atribuye la primera construcción del dodecaedro regular, emite la opinión de que el primer descubrimiento hubiera podido ocurrir por el manejo de los pentágonos regulares que forman las caras del poliedro; pues al trazar diagonales en el pentágono aparece una hermosa figura que se prolonga indefinidamente en formas semejantes y siempre más estrechas que al artista-geómetra, por algunas consideraciones de simetría y cálculo de ángulos, habría revelado la inconmensurabilidad del lado con la diagonal del pentágono (ver fig. 6).

En el mismo orden de ideas, aunque en forma mucho más complicada y artificiosa que nuestras anteriores consideraciones aritméticas, H. G. Zeuthen, en sus *Notes sur l'histoire des Mathématiques*[16], cree posible que la demostración de Theodoro no fuera sino una interpretación geométrica de lo que nosotros sabemos hoy con toda generalidad, que el desarrollo en fracción continua de una irracional cuadrática es periódico. Zeuthen desarrolla su idea únicamente para los casos de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ y, después de haber notado que para $\sqrt{10}$ y $\sqrt{17}$ se puede seguir de cerca lo dicho para $\sqrt{3}$, expresa simplemente: "On aurait pu donner quelque autre forme à cette démonstration en se servant deux fois de la connaissance du gnomon; mais en

---

[15] KURT VON FRITZ. "The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum". *Annals of Mathematics*, vol. 46 (1945), p. 242.

[16] VIII. "Sur la constitution des livres arithmétiques des Eléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité". 1910.

tout cas cette connaissance qui équivaut à l'usage de la formule $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, dont on se sert continuellement en développant les racines carrées en fractions continues, a pu suffire pour démontrer de la même manière l'irrationalité des racines $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ..., $\sqrt{17}$ ".

Vamos a exponer, en forma más concisa, pero que se adapta probablemente más al análisis, el concepto de la demostración señalada por Zeuthen, para permitir la comparación con la solución aritmética indicada antes:

Indicando con N un entero no cuadrado y con h el máximo entero cuyo cuadrado es menor que N, pongamos

$$k = N - h^2 = (\sqrt{N} + h)(\sqrt{N} - h)$$
$$= 2h(\sqrt{N} - h) + (\sqrt{N} - h)^2. \qquad (1)$$

Se nota en seguida que, siendo, por hipótesis, $N < (h + 1)^2$, será $k = 2h$. Supongamos, por un momento, que sea k divisor de $2h$ y pongamos $2h = km$; la igualdad anterior puede entonces escribirse

$$1 = m(\sqrt{N} - h) + 1/k(\sqrt{N} - h)^2;$$

luego, por simple multiplicación de los dos miembros por un factor,

$$\sqrt{N} - h = m(\sqrt{N} - h)^2 + 1/k(\sqrt{N} - h)^3$$
$$= mk \,.\, 1/k(\sqrt{N} - h)^2 + 1/k(\sqrt{N} - h)^3$$
$$1/k(\sqrt{N} - h)^2 = mk \,.\, 1/k^2(\sqrt{N} - h)^3 + 1/k^2(\sqrt{N} - h)^4$$
$$1/k(\sqrt{N} - h)^3 = mk \,.\, 1/k^2(\sqrt{N} - h)^4 + 1/k^2(\sqrt{N} - h)^5$$

....

Estas igualdades expresan efectivamente un procedimiento de divisiones sucesivas a partir de dos segmentos representados por 1 y $\sqrt{N} - h$, el cual no tiene terminación; la fórmula (1), que no es más que el teorema del gnomon, sugiere un principio de interpretación geométrica, la cual, sin embargo, está enormemente dificultada por la necesidad de dar significado segmentario a las potencias que se presentan en las igualdades sucesivas. Se ve que en el caso en que el procedimiento sea aplicable, el período de la fracción continua que representa $\sqrt{N}$ contiene a lo sumo dos términos (sin que la condición sea suficiente). Además, las cosas se hacen mucho más complicadas si k no es divisor de $2h$.

Para $N \leq 17$ se tienen los resultados siguientes:

$h = 1$, $N = 3$; $k = 1$ (divisor de $2h$)
$h = 2$, $N = 5, 6, 7, 8$; $k = 1, 2, 3, 4$
(k divisor de $2h$ en los casos 1°, 2°, 4°; queda excluido $N = 7$)
$h = 3$, $N = 10, 11, 12, 13, 14, 15$; $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$;
resultan divisores de $2h = 6$ los valores de $k \neq 4, 5$
$h = 4$, $N = 17$; $k = 1$.

Escapan luego a la hipotética construcción sugerida los valores de N = 7, 13, 14 y se encuentra en efecto que el período de la fracción continua que representan sus raíces comprende 4 y 5 términos.

Una razón aparente para justificar el esfuerzo geométrico de Zeuthen podría estar en las palabras con que Platón hace empezar el discurso de Theeteres: "Theodoro nos dibu-

jaba ciertas figuras sobre las raíces (...)" (ver fig. 7), pero nada dice que en estas figuras residiera exactamente la demostración de la inconmensurabilidad de que habla después; si Theodoro explicaba las aplicaciones del teorema de Pitágoras, lo más natural era que primero afirmara la posibilidad de construir uno después de otro los segmentos representativos de las raíces de todos los números; diríamos más, su *existencia*, que únicamente por esta construcción podía ser asegurada, era la premisa fundamental y necesaria para dar lugar a la pregunta sobre la longitud y la conmensurabilidad. Resulta entonces que la interpretación más natural de las palabras citadas es que Theodoro dibujaba algo como la figura en espiral que aquí presentamos. Puede ser curioso notar (sin que queramos sacar de allí ninguna hipótesis precisa) que con la $\sqrt{17}$ se cierra la primera vuelta de la espiral.

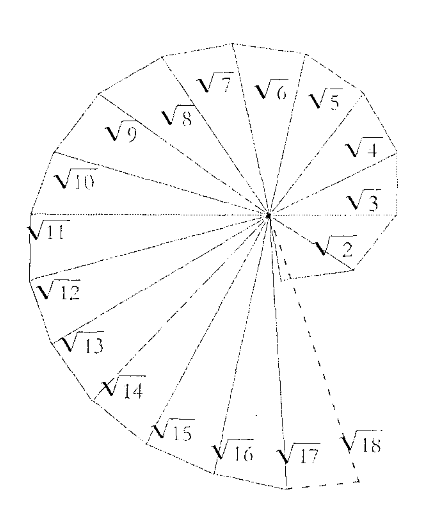


Fig. 7

Ya que tenemos en las manos el diálogo del *Theetetes*, vamos un momento a leer el prólogo. Se trata de una breve conversación entre dos personajes que no van a aparecer más después: el uno, Terpsión, no tiene otra función que la de contertulio; el otro, actor principal, es Euclides, Euclides de Megara, filósofo contemporáneo y amigo de Platón. Euclides se ha encontrado casualmente con Terpsión mientras vuelve a su casa después de haber ido a saludar a Theetetes, que grave y mortalmente enfermo regresaba de la guerra en Corinto. Euclides se extiende en elogiar los méritos y la precoz inteligencia del amigo; y en prueba de esto cuenta cómo muy joven hubiera Theetetes sostenido en el porche de Atenas una conversación con Sócrates que había despertado el interés y la admiración del filósofo, de tal modo que el mismo Sócrates se la había luego referido en sus menores detalles. Y Euclides había anotado el cuento de Sócrates; y para mantener la más estricta fidelidad varias veces, al encontrarse luego con Sócrates en el mercado, le había preguntado por más aclaraciones y detalles, corrigiendo luego cuidadosamente sus apuntes. Euclides invita a Terpsión a entrar en su casa para oír la lectura del relato; y aquí empieza el diálogo *Del Conocimiento*. Ahora bien, pues la parábola es parábola, ¿qué ha querido decirnos Platón con ella? Ciertamente su gran amistad y su admiración hacia Theetetes, pero ¿no habrá algo más en ese cuidado de Euclides en corregir apuntes para asegurar la exactitud? ¿Sería tan atrevido ver allí a Euclides como depositario de una obra póstuma del amigo? No hay tradición de que el megarense fuera considerado matemático; pero también se conoce muy

poco de él; y la identidad con el matemático fue admitida por los primeros editores y comentaristas de los *Elementos* al principio del Renacimiento occidental; sólo a fines del siglo XVI fue notado por Comandino que tal identidad contrastaba con la tradición trasmitida por Proclo. Vuelva el lector sobre las consideraciones con que empieza el capítulo; la idea de un Euclides simple editor y no matemático concuerda aun con otras consideraciones; por ejemplo, se atribuyen al mismo nombre otras obras que por su redacción contrastan plenamente con la fuerza lógica de los *Elementos*[17]. Pero hemos dicho que muy poco nos puede interesar establecer quién fue el tal Euclides. Euclides es la obra; y esta obra debemos pensar que estaba concluida antes de mediar el siglo IV a. C. Es la misma conclusión a la cual llega la historia doxográfica y tradicional que considera a los *Elementos* más o menos como una recopilación de lenta elaboración, de una serie de pequeños descubrimientos, perfeccionamientos y adelantos empezando con Thales de Mileto a principio del siglo VI, a través de Pitágoras[18]. Y que la conclusión, tomada en la materialidad de los enunciados, sea la misma, constituye ciertamente una útil comprobación; pero no podemos dejar de notar una diferencia esencial, y es que, mientras aquella, guiada por un materialismo evolucionista

---

[17] Véase, por ejemplo, Euclide : *L'Optique et la Catoptrique*, obras traducidas por primera vez del griego al francés con introducción y notas de Paul ver Eecke.

[18] Cfr. p. ej. Abel Rey : *La jeunesse de la science grecque*. París, 1933.

EVCLIDE MEGARENSE PHILOSOPHO,

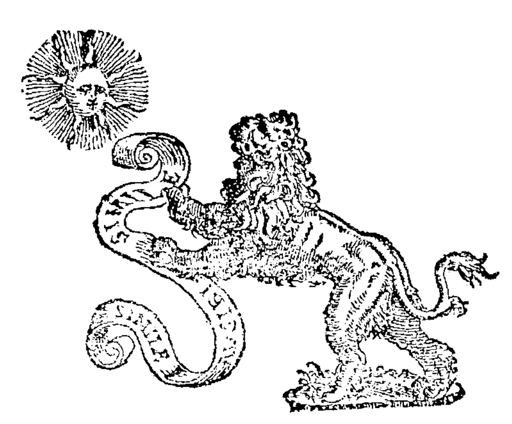
SOLO INTRODVTTORE DELLE SCIENTIE MATHEMATICE.

DILIGENTEMENTE RASSETTATO, ET ALLA integrità ridotto, per il degno professore di tal Scientie Nicolo Tartalea Brisciano.

SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.

CON VNA AMPLA ESPOSITIONE dello istesso tradottore di nuouo aggiunta.

TALMENTE CHIARA, CHE OGNI MEDIOCRE ingegno, senza la notitia, ouer suffragio di alcun'altra scientia con facilità serà capace a poterlo intendere.



IN VENETIA, Appresso Curtio Troiano. 1565.

que asemeja hombres y tiempos sin encontrar solución racional a los milagros del espíritu (del mismo modo como ya afirma Eudemo el eterno retorno de los mismos pensamientos con el retorno de las estaciones celestes), encuentra su documentación en dudosas interpretaciones de fragmentos de origen dudoso; nosotros pudimos fundarnos sobre la lectura de una obra de arte y de pensamiento, verdaderamente eterna en el tiempo por su integridad lógica y conceptual, con tal únicamente de admitir la unidad entre un desarrollo científico y una enseñanza moral.

Euclides es la obra, pero la obra de un hombre, sea cual sea, Euclides o Theetetes, por la unidad del concepto que guía su formación; acaso incompleta y con alguna floración sucesiva, como toda obra humana.

Una de las características de los *Elementos* a la que no hemos tenido que referirnos hasta ahora es la conducta lógica formal de la exposición, que recuerda la teoría aristotélica del silogismo: sistemática división por proposiciones; en cada proposición, enunciación primero de una tesis en términos generales; luego nueva enunciación aplicada a una figura particular. Finalmente, demostración sobre la figura. La demostración dividida en una serie de conclusiones particulares en cadena y terminando regularmente con la afirmación: "lo que se quería demostrar". Es bien posible que tal formalismo imitara de cerca algo de la dialéctica sofística, y por nada resulta absurdo que adoptara tal forma un discípulo de Sócrates, el fustigador de sus contemporáneos sofistas, pues lo que Sócrates combate no es la forma, que hasta cierto punto conserva él también en sus análisis dialo-

gados, sino el error que se oculta en deducir, por razonamientos formalmente exactos, de premisas variables y engañosas; valía la pena mostrar qué distinto es el resultado cuando se parte de axiomas claros y unívocos. La maravilla de los *Elementos* consistía precisamente en demostrar, con el ejemplo, cómo podía la inteligencia del hombre, guiada por el razonamiento riguroso, llegar de esas pocas premisas simples a las verdades que el secular conocimiento empírico podía haber enseñado (Sócrates en la *República* asigna a la dialéctica la tarea de fundar los axiomas; pero es arte difícil al cual tampoco él sabe encontrar otra salida que reflexionar y no concluir). Al separarse nuevamente, después de Aristóteles, la observación de la realidad física, del interés para la realidad intelectual (todos los ejemplos que se aducen para mostrar conocimientos matemáticos en Aristóteles demuestran únicamente que nunca entendió nada de matemática), los *Elementos* han pasado gradualmente a la modesta función de fuentes y modelos para las vacías discusiones formales de la escolástica; hemos dado un pequeño ejemplo con la correspondencia entre dos escolásticos comentada por Tannery. Pero esta situación ha durado mucho tiempo y en algunos respectos la encontramos todavía.

Sin embargo, a la distancia de 15 ó 20 siglos el genio griego encuentra en Occidente y particularmente en Italia nueva comprensión, llegando a la culminación en la obra de Galileo; cosa singular, hasta la forma dialogada de la discusión exhuma Galileo. Se atribuye a menudo a Galileo el mérito de ser el fundador del método experimental y podemos admitírselo, pues afirmó en cualquier oportunidad la

primacía de la experiencia sobre la charla filosófica, porque él mismo nunca dejó de mirar a la naturaleza y porque de su escuela nació la Academia del Cimento, que tuvo por lema "provando e riprovando"; pero no fue por eso más experimentador que Aristóteles, que pesó las vejigas infladas y vacías, ni más observador que Tycho Brahe, que trazó las órbitas de los planetas. Su lucha contra los filósofos es la lucha de Sócrates contra los sofistas. El isocronismo de las oscilaciones del péndulo habrá sido notado muchas veces por otros antes que él; y si un día ese isocronismo debía servir para la construcción de relojes, sin duda antes o después habría nacido el relojero inventor del aparato, como durante siglos y milenios se habían usado relojes de agua y de arena antes que Galileo y Leonardo enunciaran las leyes de la gravedad y del movimiento de los líquidos. Pero lo que él vio en ese isocronismo fue la masa que subía cada vez a la misma altura de la cual había caído y la aplicación fue, por una extrapolación portentosa, la afirmación del principio de inercia, que ninguna experiencia puede demostrar y que ocupa en la mecánica el mismo lugar que los axiomas en la geometría de Euclides. Y si queremos ampliar las analogías, observaremos que Galileo fue ciertamente tal matemático como para establecer las leyes de la caída de los graves y también para construir una tabla de tiro –sobre la hipótesis totalmente teórica del tiro parabólico–, y de Sócrates no sabemos hasta qué punto fuera justificada su pretensión de entender geometría; pero como Sócrates no fue ni Theetetes, ni Eudoxo, ni Euclides, igualmente no fue Galileo, ni Cavalieri, ni Viviani, ni Torricelli. Si el pensamiento galilea-

no abrió el camino para considerar que valía la pena desarrollar el cálculo infinitesimal para organizar racionalmente la mecánica y la física, pudo el pensamiento socrático encontrar apoyo y aplicación en la fundación racional de la Geometría y del Álgebra.

Leyendo a Euclides

I

Definiciones, Postulados, Nociones Comunes. La teoría de la Igualdad

Vamos pues a leer[1] los *Elementos* con el afán de entender, en su significación, en su formación, en su desarrollo, aquel pensamiento deductivo que se funda sobre la fe en la humana identidad entre conocer y entender.

En Euclides vemos, por primera vez en la historia del pensamiento, actuado el propósito de hacer que los principios primeros sobre los cuales va a obrar la deducción sean pocos, simples, y que su proveniencia sean más bien la contemplación y la reflexión que la material e instrumental. Propósito actuado, pero no enunciado, porque nunca en los *Elementos* encontramos propósitos enunciados, ni principios directores explicados. Sin embargo, esta formación puramente intelectual de conceptos, totalmente extraña a los datos de la experiencia, ya la hemos visto en la separación por Theetetes entre la noción de segmento y la de longitud; es

---

1 El lector que quiera seguirnos en la conversación de este capítulo y de los siguientes tendría ciertamente mucha ventaja si, entendiendo nuestro "leer" en sentido estricto, tuviera entre manos el texto euclídeo. Hemos buscado sin embargo, con la reproducción textual de algunos enunciados y con las figuras, sobrellevar la dificultad; con tal, desde luego, de que él tenga presente, aun sólo por su conocimiento de la Geometría, la estructura general de la obra.

bien evidente que tal segmento debía limitar grandemente la libertad del geómetra para definir la noción de la recta.

De todos modos, Euclides empieza su exposición con un grupo de proposiciones simplemente afirmadas y que el lector debe aceptar; están divididas en tres categorías: *definiciones*, *postulados* y *nociones comunes*. Debemos buscar aclarar esta división. Notamos, mientras, que otras definiciones se agregan al principio de casi todos los Libros en que está dividida la obra, pero no postulados ni nociones comunes.

Corre enseguida el pensamiento a otra terna de premisas que, en las modernas teorías lógicas, se anteponen a cualquier deducción, con los nombres totalmente parecidos de *ideas primitivas*, *postulados* (a veces también *axiomas*) y *definiciones*. Hay entre ambos sistemas cierto parentesco, pero no identidad. *Ideas primitivas* son vocablos o, más generalmente, signos que nosotros nos obligamos a utilizar únicamente por cuanto ellos entran en la enunciación de los postulados y en las definiciones y en las proposiciones deducidas de éstos, pero nos vedamos pedir para ellas mayores explicaciones o representación objetiva. El idioma común está lleno de tales vocablos, porque es evidente que no es posible explicar el sentido de cualquier cosa si no se empieza por usar palabras no explicadas; pero el idioma común no se cuida de enunciar tampoco para ellos ningún postulado, y es ésta en alguna parte la razón por la cual es tan difícil entenderse entre los hombres. Las teorías lógicas pretenden que esas ideas primitivas sean posiblemente pocas y que su uso, como hemos dicho, sea limitado por las agrupaciones de palabras que constituyen los postulados; condición ésta que ellas realizan en buena parte, pero sin que sea posible hacerlo en modo completo y absolu-

to.[2] Euclides no enuncia explícitamente ideas primitivas pero debemos reconocer que el vocablo mismo es algo nuevo y aun hoy puede sonar, para muchos oídos, un poco raro.

En la acepción moderna, *postulado* y *axioma* son palabras equivalentes para indicar proposiciones indemostradas, es decir, estructuras gramaticales formadas por la reunión de las ideas primitivas y de términos lógicos con el propósito de servir de fundamento a la teoría deductiva. En fin, las *definiciones* deberían ser únicamente nominales, es decir, declarar el significado de algún signo o expresión corta utilizada para evitar algún molesto rodeo con palabras. Mucha tinta se ha gastado sobre definiciones nominales y substanciales, pero no son cosas que interesen aquí.

Definiciones, postulados y *axiomas* o *nociones comunes* tienen en los *Elementos* cierta relación de significado con lo explicado anteriormente, sin coincidir; y quizás esta falta de coincidencia haya sido a veces causa de equivocaciones en el juicio de los críticos.

Se traduce por "definiciones" la palabra que en el texto griego es ὅροι ; G. Vacca y F. Enriques notan que la traducción literal sería "confines, mojones" y proponen pues la versión en "términos". Por cuanto, en el griego y en la traducción, siempre son palabras de significado material, objetivo, utilizadas con significado transpuesto, con la nueva versión no habremos adelantado mucho si no la explicamos. Los mojones han servido en todos los tiempos para establecer límites, pero

---

[2] Para mayores explicaciones pueden verse algunas consideraciones en mi memoria "Correría en la lógica". Revista de la Universidad de Tucumán, vol. III.

también para establecer señales que sirvieran de guía. Los términos materialmente no pueden ser sino confines; pero literariamente son palabras de significado determinado y preciso, algo propiamente como definiciones. Observaremos entonces que las definiciones euclídeas están reunidas muchas al principio de la obra, antes aun de los postulados y axiomas, luego en número menor y en general con significado más técnico, al principio de los distintos Libros. No parece absurdo suponer que se tratara simplemente, en la intención del autor, de algo como un pequeño vocabulario, para entenderse con el lector sobre el uso y el significado de ciertos términos no pertenecientes a la lengua común; guía para la lectura, pero no parte integrante del texto; y la cosa parece tanto más verosímil si admitimos –como ciertamente es– que Euclides (o Theetetes) no tenía como fin *enseñar geometría* –para las prácticas geométricas bastaban otros maestros, aquellos que, según dice Sócrates, medían por división–, sino que se dirigía a personas cultas que sabían geometría y a las cuales pretendía mostrar cómo las verdades geométricas se ordenan en el entendimiento. Se explica así por qué las definiciones euclídeas comprenden las más variadas proposiciones, unas equivalentes a la declaración "es idea primitiva", "Uds. van a entenderme"; otras aclarando términos vulgares, como triángulo y cuadrilátero; otras implicando la admisión de algún teorema. Euclides, en efecto, nunca se refiere a una definición como expresión de la verdad de algo necesario para llevar a cabo una demostración.

Los postulados y las nociones comunes deberían asemejarse unos y otras a lo que modernamente se llama postulado (o axioma); y que la diferencia no haya siempre sido percibida por los geómetras sucesivos lo demuestra el hecho de que

en distintas transcripciones, algunas de estas proposiciones han emigrado de uno a otro grupo; sin embargo, esa diferencia en el concepto del autor fue ciertamente muy grande como el análisis siguiente nos va a mostrar. Formalmente, los postulados son afirmación de operaciones geométricas que se pueden efectuar: trazar una recta, trazar una circunferencia, determinar la intersección de dos rectas; más precisamente constituyen afirmaciones de existencia y determinación unívoca de determinadas figuras; pese a la expresión operativa y luego cinemática de los verbos "trazar" y "prolongar", deben concebirse en significado abstracto y estático.

Las *nociones comunes* son aparentemente la expresión de las propiedades fundamentales de las "clases" de objetos (en terminología moderna, de los *conjuntos*); y en efecto son las más comúnmente citadas por Aristóteles, el codificador de la teoría de las clases, cuando pretende presentar ejemplos matemáticos; también, por esta razón, se interpreta lo más corrientemente por los autores la palabra *comunes* en el sentido de "comunes a todas las ciencias". Vamos a mostrar pronto que tal interpretación no puede corresponder a la del autor de los *Elementos*. Preferentemente podríamos considerarlas como los postulados generales de la noción geométrica de igualdad.

Empecemos pues leyendo a Euclides.

La primera definición dice, según la traducción más comúnmente aceptada: *Punto es lo que no tiene partes*; posiblemente sea traducción más literal: *punto es aquello cuya parte es nada*[3]. Se pre-

---

[3] Esta traducción fue adoptada entre los antiguos por MARZIANO CAPELLA, uno de los primeros traductores de Euclides; entre los

fiere generalmente la primera traducción porque parece más sensata y quizás, transportándonos a otros filósofos griegos, parece más conforme a las ideas de Demócrito y a la *mónada* de Pitágoras o de Aristóteles; pero si se entendiera que Euclides, más que la indivisibilidad física, la cual precisamente en el concepto de mónada no excluye la extensión, quisiera afirmar la imposibilidad conceptual de aplicarle la noción de *partes*, se podría explicar, nos parece, la expresión aparentemente absurda. En efecto, para indicar el punto, Euclides introduce también una palabra nueva, σημεῖον, "signo", en lugar de *stigma* usado anteriormente y que etimológicamente equivale precisamente a "punto", es decir, agujero hecho con instrumento acuminado.

Comparemos, para comprender mejor, con la definición de *unidad* y de *número* que encontramos al principio del libro VII: *Unidad es aquello por lo cual cada una de las cosas existentes se dice uno - Número es una colección de unidades.* Aquí ha desaparecido todo rasgo material que se transparentaba en la palabra "partes" y Euclides no titubea en atribuir el papel de predicado a una determinación abstracta puramente funcional, por lo cual algo puede ser concepto en cualidad de decisión de la inteligencia, pero no puede ser cosa. Con igual criterio podríamos por tanto interpretar la definición de "punto" como "punto es aquello por lo cual es absurdo concebir partes". Estamos llevados de esta manera a admitir que Euclides se acercara bastante al concepto de "idea primitiva"

---

modernos la encontramos aceptada por E. PEYRARD (*Les oeuvres d'Euclide*, 1815) y por M. SIMON.

según la moderna lógica matemática. Las dos seudo-definiciones euclídeas de punto y de número se aclaran así mutuamente si las entendemos por: "punto" es cierta idea primitiva perteneciente al género "elemento" (cosa de la cual no se conciben partes); "número" es cierta idea primitiva perteneciente al género "clase" (colección de elementos). Y entendiéndolo así, quizás estaría Euclides más en lo cierto que con una más rígida interpretación de la indefinibilidad de las ideas primitivas.

Podemos, después de este análisis, conceder a Euclides muchas de las definiciones siguientes, más o menos sin preciso significado, como las de línea, de superficie, de recta y de plano. Si en nuestros tratados nosotros evitamos hoy el escollo, debemos reconocer que lo hacemos girando a lo largo y renunciando a algo; no hablamos de *líneas* en la geometría elemental ni en la proyectiva porque limitamos la consideración a algunas líneas especiales, (rectas, círculos, cónicas), definiéndolas o caracterizándolas en cada caso con su nombre especial; nos imponemos ignorar teóricamente un carácter común que prácticamente conocemos, para mantener el rigor lógico. Y en esto seguimos *precisamente* a Euclides; la característica de la geometría de Euclides está *precisamente*, como lo vamos a ver, y como lo vimos ya analizando las palabras de Theetetes, en imponerse limitaciones en los conceptos y formas de razonamientos para escapar a los escollos del empirismo; para entender los *Elementos* no es necesario conocer otras líneas que rectas y círculos y la costumbre hace que eso parezca como la cosa más natural; pero ¿por qué? Como hemos notado hablando de Hipócrates, es creíble que en los tiempos anteriores, los tiempos de la geometría empírica,

nada se opusiera a trazar líneas variadas ayudándose con cuerdas y otros subsidios; y Euclides no podía hablar olvidando por completo los ejemplos que estaban delante de la mente de todos. Para dar una definición general de línea, nosotros hacemos un largo giro a través de la geometría analítica y el análisis superior o la topología; y el camino que tenemos que recorrer para mantener las exigencias euclídeas es mucho más largo y penoso de lo que parece.

Abandonemos luego la lectura detenida de otras definiciones en el primer libro de los *Elementos* y fijémonos un momento sólo en una que, con las cosas dichas recién y con otras que vendrán, tiene cierta vinculación; se trata de la definición de *ángulo*. Dicen las definiciones 8 y 9: *Ángulo plano es la inclinación entre dos líneas en un plano las cuales se encuentran y no están en línea recta. Y si las dos líneas que contienen el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.* Toda la obra euclídea se puede leer, en lo que es el fin perseguido, sin hablar de otros ángulos que los rectilíneos, y en las modernas teorías de la geometría elemental se define únicamente el ángulo rectilíneo como parte del haz de rectas; para que la definición sea completa no se pueden evitar algunas complicaciones sobre las cuales no vamos a detenernos; pero ¿por qué Euclides sigue otro camino? Euclides no podía descartar completamente un concepto que parecía haber prestado servicio útilmente a geómetras anteriores. La consideración de ángulos entre líneas curvas parece natural con las lúnulas de Hipócrates. Aristóteles nos recuerda, como ejemplo de razonamiento matemático, la siguiente seudodemostración de la igualdad de los ángulos de la base de un triángulo isósceles. Sea ABC el triángulo, con AB = AC; AB y AC son radios de un círculo

de centro A y forman con la circunferencia ángulos iguales; por otra parte, son iguales también los ángulos que forma

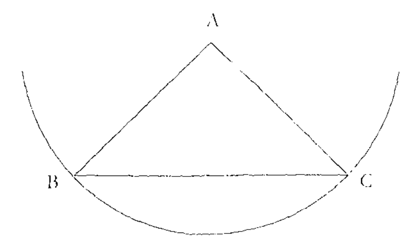


Fig. 8

con la circunferencia la cuerda BC; por lo tanto, son iguales los ángulos que la BC forma con AB y con AC por cuanto son diferencias de ángulos iguales.

Euclides también en la definición 7 del Libro III dice: "Ángulo de un segmento (de círculo) es aquel que es contenido entre una recta y la circunferencia de un círculo" (los ángulos entre la circunferencia y una cuerda); y en la proposición 31 del mismo Libro utiliza aparentemente la noción para decir, con un razonamiento que se parece bastante al citado de Aristóteles, que el ángulo formado por un arco con la cuerda es mayor o menor que un ángulo recto según que el arco sea mayor o menor que la semicircunferencia. Pero de estas proposiciones no hace ningún uso, y cuando tiene que tratar con ángulos rectilíneos, directa o indirectamente, éstos están ligados a triángulos. Por lo tanto, tiene poca importancia que la definición quede un poco nebulosa; veremos más adelante otro aspecto posible de esta definición .

Mas, comparando el citado razonamiento aristotélico con el ningún uso que hace Euclides de la noción de ángulo

entre líneas curvas, se nos presenta un ejemplo del trabajo de selección y de limpieza realizado por él respecto del razonamiento matemático: la seudo-demostración aristotélica no procede de ninguna proposición anteriormente conocida (podemos añadir que es por esto que el ejemplo conviene a Aristóteles; porque sin que sea necesaria una preparación anterior, permite aplicar la seudo-evidencia, no más que de palabras, afirmando que diferencias de iguales son iguales); las afirmaciones de que los ángulos de la circunferencia con los radios AB, AC son iguales y que son iguales los ángulos de la circunferencia con la cuerda, se fundan únicamente sobre una observación de simetría, o, si se quiere usar términos más filosóficos, sobre una razón suficiente. Y, en tal caso, ¿por qué no aplicar sin más estas razones directamente al triángulo isósceles? Euclides rechaza la seudo-demostración, rechaza, aun después de haberlos definido, los ángulos entre la circunferencia y las rectas; veremos dentro de poco cómo la demostración se transforma en sus manos.

Euclides pasa a enunciar los postulados:

Las cosas siguientes son postuladas (es decir, se pide sean concedidas):

1. *Desde cualquier punto a cualquier otro punto se puede trazar un segmento.*
2. *Y cada segmento se puede prolongar por derecho.*
3. *Y con cada centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo.*
4. *Los ángulos rectos son iguales.*
5. *Y si una recta, al encontrar otras dos, forma con éstas ángulos internos de una misma parte menores* (es decir de suma menor) *que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se*

encuentran de aquella parte donde la suma de los ángulos es menor que dos rectos.

En el postulado 3, la palabra "distancia" no debe evidentemente entenderse en sentido métrico sino en el sentido general de alejamiento; con cada centro y para otro punto situado en cualquier distancia se puede trazar una circunferencia. El postulado 4 tiene un carácter particular del cual hablaremos pronto. El 5 es el célebre postulado de las paralelas.

Si dejamos de lado el postulado 4, cada uno de los otros enuncia que cierta cosa se puede hacer: trazar, prolongar, encontrar el punto común. Evidentemente este hacer tiene sentido existencial, intelectivo, y, considerando el encontrarse en un punto como dual de trazar una línea, los postulados adquieren una homogeneidad conceptual que quizá disminuya un poco lo extraño que en todo tiempo el 5 presentó para los geómetras:

Existe y es único el segmento que une a dos puntos cualesquiera.

Existe y es única la prolongación rectilínea de un segmento, a partir de uno cualquiera de sus extremos.

Existe y es única la circunferencia en un plano dado, con centro dado y por un punto dado del plano.

Existe y es único el punto de intersección de dos rectas coplanares, cuando existe otra recta que corta a las dos formando con ellas ángulos de la misma parte cuya suma es menor que dos ángulos rectos.

Nos parece útil añadir aquí una aclaración.

En el lenguaje matemático moderno se hizo frecuentemente la distinción entre proposiciones existenciales y pro-

posiciones constructivas; la distinción se vinculó esencialmente con la llamada aritmetización de la matemática; la cual, con Kronecker, Weierstrass, Dedekind, parte del lema de edificar todo el análisis sobre el solo concepto primitivo de *número entero*, debiendo todo lo demás depender de éste exclusivamente por definiciones nominales. Muchas veces esta limitación fue considerada, por pioneros o por secuaces demasiado entusiastas, como la afirmación de una verdad, circunscribiendo el dominio total de la matemática aceptable; cuando la cosa fuera así, no constituiría más que la sumisión de la matemática al concepto empirista –y recuérdese que es el mismo del primer pitagorismo–; sería más o menos como decir: puesto que nada tiene sentido sino lo medible, y puesto que ninguna medida es expresable sino mediante números enteros, no podrá la matemática decir cosas sensatas sino en términos de números enteros. Pero, en una visión más justa, la aritmetización no es más que una limitación que voluntariamente nos imponemos acerca de los instrumentos de nuestras deducciones; resulta imposible no admirar lo mucho de bello y de profundo que ésta y otras limitaciones han producido en el campo de la matemática; la hermosa construcción de los *Elementos* es bien el producto de una limitación parecida. Sin embargo, no podemos inclinarnos a dar a tales limitaciones un valor dogmático: la construibilidad es relativa a los medios que se conceden a la deducción; lo existente es lo concebible sin contradicción dentro de cierto sistema lógico que debe entenderse determinado a priori, dentro de ciertos límites, con un acto de nuestra voluntad dirigido, desde luego, por las condiciones propias de nuestro pensamiento. Los medios que tenemos a nuestra disposición para decidir

acerca de la no-contradicción están determinados por el camino que, siguiendo a Sócrates, el alma ha recorrido reflexionando sobre sí misma.

Con la enunciación de los postulados entendemos que Euclides ha querido aclarar el "existe" con el "se puede"; pero, cualquiera sea la palabra, pide al lector haber reflexionado bastante para concebir –y considerar sin contradicción– los conceptos enunciados, con las propiedades que se les atribuyen; para decirlo con las palabras modernas, Euclides define con los postulados las *ideas primitivas* de su sistema. Para ayudar al lenguaje con el dibujo, esos conceptos podrán, en cada caso, representarse por figuras, y esto justifica el "se puede"; pero está siempre entendido que lo que el geómetra afirma no se refiere a la imagen física, sino al concepto mental que con ella se quiere representar. Así nos lo advierte Sócrates.

Resulta así también definido el significado del construir.

El postulado 4 ha presentado siempre para los comentaristas serias dificultades de interpretación, tales de hacerlo emigrar a veces a las *nociones comunes*, o de hacerlo considerar como una añadidura debida a la corrupción de los textos. De primera intención, sorprende en efecto su forma aparentemente heterogénea respecto de los demás postulados y, por la aparición de la noción de igualdad, comparable más bien a aquellas otras proposiciones en las que domina el concepto de magnitud. Pero más notable todavía es el hecho de que en los desarrollos sucesivos falta toda alusión directa al mismo, de manera que puede decirse que, en la construcción euclidiana, no tiene aplicación visible. Para encontrarle una, Heath, guiándose por su posición ordinal de preceder inmediatamente al postulado de las paralelas donde se habla de

"dos ángulos rectos", supone que el autor estimara necesario dar a la expresión significado determinado anticipando la afirmación de que "ángulo recto" es una magnitud que no varía de uno a otro ejemplar. Aunque, en lógica estricta, la consideración no haga arrugas, la oportunidad nos parece demasiado menuda y de aplicación estrecha para justificar el postulado; y más cuando consideramos que tal necesidad no corresponde a la orientación general de la obra. De ángulo recto ya había hablado Euclides en la definición 10, sin preocuparse de sí el lector entendía el término; y también hemos ya notado que él hablaba a personas que con el sentido vulgar de los términos debían poseer perfecta costumbre, y que, por otra parte, la necesidad para ellas de tener del postulado 5 una comprensión completa y racional quedaba demorada hasta muy adelante, cuando la igualdad de los ángulos rectos habría podido resultar, como se hace corrientemente en los libros modernos, de los teoremas de igualdad de triángulos.

Hay sin embargo otra interpretación perfectamente orgánica del postulado 4; acaso tan orgánica como para poner otros interrogantes acerca del pensamiento que guiara al autor. Los elementos con los cuales está construida la geometría de Euclides son segmentos y ángulos; veremos pronto, al analizar los primeros teoremas, el oficio fundamental que cumplen los postulados con respecto a la operación de *transporte* de las figuras, para el cual el instrumento principal es el círculo que, en la interpretación existencial del post. 3, debe considerarse como figura dada más bien que generada por movimiento continuo; pero de inmediato el círculo tiene vinculación con los segmentos, no con los ángulos. Para llegar a éstos sirven los teoremas sobre la igualdad de los triángulos de


IHS
EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
ACCESSIT XVI. DE SOlidorum Regularium comparatione.
OMNES PERSPICVIS DEmonstrationibus, accuratisq; scholijs illustrati.
AVCTORE
CHRISTOPHORO CLAVIO
BAMBERGENSI.
SOCIETATIS IESV.
ROMAE,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

los cuales desciende que el transporte de un ángulo cualquiera podrá conseguirse cuando se sepa transportar un ángulo determinado. La elección para ese fin del ángulo recto habría entonces podido presentarse como la más natural, también por razones de tradición, coincidiendo substancialmente con las consideraciones de simetría a las que deben referirse las demostraciones intuitivas de Sócrates en el *Menón*[4]. El postulado 4 vendría, de este modo, a hacer juego con los anteriores como figura elemental, estáticamente concebida con independencia de un procedimiento concreto de construcción. Pero, en el desarrollo efectivo que sigue, Euclides se dirige, para este fin, a otra consideración, substancialmente equivalente, pero de más fácil manejo para eludir el uso de instrumentos de transporte rígido, es decir, la igualdad de cada ángulo consigo mismo después de permutar los lados. Esta igualdad admitirá en efecto en la prop. I, 5 para establecer las propiedades del triángulo isósceles, sin enunciarla explícitamente como postulado; y de estas propiedades resultarán, sin necesidad de dirigirse al post. 4, las de rectas perpendiculares y ángulos rectos.

Desde ahora debemos tener presente que los *Elementos* están lejos de tener forma sistemáticamente acabada, dando cuenta en cada instante de métodos y fines perseguidos.

Llegamos por fin, con nuestra lectura, a las *nociones comunes* o *axiomas*.

---

[4] En la geometría práctica de los tendedores de sogas debe de haber sido usual trazar la prolongación de una recta y construir los ángulos rectos que la dada y la prolongación forman de partes opuestas de una perpendicular común.

Una dificultad nueva se presenta aquí para juzgar cuál pudo ser verdaderamente el texto de Euclides, por el hecho de que manomisiones hubo ciertamente en las varias transcripciones, variando de una a otra edición hasta el número de las proposiciones agrupadas bajo este título, el cual, aun en las más acreditadas, varía entre 5 y 9, siendo mucho mayor en otras[5].

He aquí las cinco nociones comunes que se encuentran en todas las ediciones y que en efecto creemos son las únicas que deben reconocerse como euclídeas:

1. *Las cosas iguales a una misma son iguales entre sí.*
2. *Y si a iguales se añaden iguales, los todos son iguales.*
3. *Y si de cosas iguales se restan cosas iguales, las restas son iguales.*
4. *Y las cosas coincidentes son iguales entre sí.*
5. *Y el todo es mayor que la parte.*

Un análisis completo de estas proposiciones a la luz de la crítica moderna ofrece ciertamente algunas dificultades por efecto de la indeterminación de los vocablos. Entre las relaciones geométricas nosotros distinguimos por lo menos dos para las cuales Euclides usa la misma palabra, *igualdad*: las que llamamos *congruencia* y *equivalencia*; y la congruencia todavía la entendemos a veces como una relación entre figuras y a veces como una transformación del espacio en su totalidad. Por otra parte, tenemos todavía la noción de igualdad lógica que comparte algo con los significados precedentes.

---

[5] CLAVIO presenta 19 en la edición de 1574 y 20 en la de 1603.

La noción 1 puede aplicarse indiferentemente a cada una de estas interpretaciones; las 2 y 3, en cuanto se suponga conocido el concepto de igualdad, pueden expresar algo de las operaciones de añadir y restar; la 4 introduce por primera vez en el lenguaje geométrico la palabra "coincidir", la cual merece alguna reflexión; por fin, en la 5 debemos ver más que nada una definición de la palabra *parte* como correlativa de las palabras *añadir* y *restar* que aparecen en las nociones 2 y 3; son partes las cosas que se añaden una a la otra para formar el todo.

La palabra *coincidir* es, como dijimos, la que mayormente debe atraer nuestra atención; en la concepción geométrica más común se la considera como equivalente de *sobreponerse*; y esta última incluye una idea de movimiento. Ahora, hay muchas razones para considerar que el movimiento no puede tener ciudadanía en la Geometría. Si el movimiento consiste en ocupar sucesivamente varias posiciones, es evidente que no es posible hablar de él sin ver aparecer la idea de "tiempo" incluida en el vocablo *sucesivamente*. Pero el tiempo no pertenece a la Geometría y no es posible construir la mecánica sin el substrato de la Geometría. Y, para nuestro argumento, debe añadirse que consideraciones de esta naturaleza habían sido objeto de disputa entre los filósofos precisamente en el tiempo de la primera gestación de la geometría racional. A fines del siglo VI o principios del V a. C., Zenón había materializado en las paradojas contra el movimiento las discusiones acerca del ser y del devenir. Por lo tanto, debemos pensar que, por razones no demasiado diferentes de las mismas que hacen excluir el movimiento de la crítica geométrica moderna, la misma exclusión estuviera en el programa geométrico eucli-

diano. Se constata en efecto que los casos en los cuales la consideración del movimiento rígido parece presentarse como la interpretación más inmediata del texto euclídeo son absolutamente contados –no más de dos o tres–, mientras que es mucho mayor el número de veces en que, de admitir ese movimiento, las demostraciones habrían resultado más prontas. ¿Deberíamos creer que sólo de vez en cuando, forzado por la necesidad, Euclides rompe la consigna lógica que es casi la razón de ser de su geometría? ¿Que lo hace sin avisar al lector?

No podemos olvidar que para Sócrates y Theetetes la Geometría era contemplación, que se valía del dibujo como auxilio, igual a como nosotros usamos los símbolos matemáticos; y es por eso que del dibujo ella no podía utilizar, por ejemplo, el trazado de curvas por movimiento continuo, sino únicamente aquellas líneas (rectas y círculos) cuyas propiedades estaban completamente determinadas por los postulados, independientemente del trazado material. (Recuérdese que en la *República* Sócrates quería que aun las propiedades armónicas de las cuerdas no dependieran del oído. ¡Y el análisis infinitesimal realiza su pedido!) Ahora la pura contemplación ve bien el espacio, pero este espacio no tiene lugar determinado; es luego natural pensar que una *noción común* o idea primera, no enunciada por Euclides por ser demasiado inmediata, fuera esta falta de lugar determinado, una especie de identidad lógica por la cual *si una figura existe en algún lugar, una idéntica existe en cualquier lugar*, pues el pensamiento no tiene lugar; a esta idea, para darle un nombre, podemos llamarla *homogeneidad del espacio*. Sigue en seguida que, si una figura existe en cierto lugar y en otro lugar existe una figura igual a una parte de ella, en este otro lugar existirá una figura igual (lógi-

camente idéntica) a la primera, de la cual esta figura es parte homóloga; y podrá ser problema para el geómetra realizar esta otra figura. Así, la figura construida *coincidirá* con la puramente pensada.

Aclarado de este modo el significado de las *nociones comunes*, el análisis que va a seguir de las primeras proposiciones del texto euclídeo va a mostrarnos que ellas, pese a su expresión aparentemente escolástica, tienen en la construcción de los *Elementos* un oficio geométrico esencial, comparable en buena parte a la función que tienen en las modernas teorías los postulados con los cuales se caracteriza la congruencia. Podemos decir que las nociones comunes aparecen como el puente a través del cual los pocos postulados (evidentemente demasiado pocos en comparación con los que la moderna geometría se encuentra en la necesidad de enunciar) llegan a fundar la Geometría. Su posición después de las definiciones y de los postulados resulta así del todo natural, y se elimina la crítica de Tannery que, al interpretarlas simplemente como la repetición escolástica de afirmaciones lógicas de dominio común, notaba que estas nociones interpuestas entre la enunciación de los postulados y el principio de los desarrollos deductivos no tienen explicación posible.

Estos desarrollos deductivos empiezan en efecto de un modo que sorprende necesariamente al lector que siga los conceptos teóricos modernos: ¡las primeras proposiciones son problemas! mientras el autor todavía no ha desarrollado teoría alguna de la cual los problemas puedan ser aplicación. Sucede que es necesario realizar la operación de *llevar a coincidir*, es decir, *construir en el lugar determinado por la concepción previa de una determinada figura los elementos (segmentos y ángulos) constitutivos de otra.*

Euclides empieza con los segmentos, y divide el problema del transporte del segmento en tres etapas consecutivas:[6]

I, 1. *Sobre un segmento dado construir un triángulo equilátero* (ver fig. 9).
I, 2. *Trazar un segmento igual a un segmento dado con extremo en un punto dado.*
I, 3. *Dados dos segmentos, cortar del mayor un segmento igual al otro.*

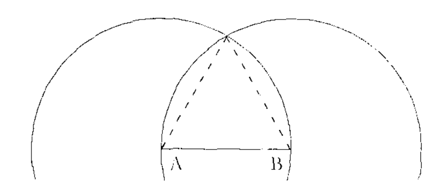


Fig. 9

La resolución del primer problema está representada claramente por la figura adjunta. Euclides olvida decirnos por qué las dos circunferencias deben cortarse; claro es que la sutileza moderna de ver allí una propiedad topológica que es necesario demostrar o admitir explícitamente no estaba todavía en el pensamiento.

En la prop. 2 se da un segmento BC y un punto A, y se propone trazar un segmento igual a BC con un extremo en A. Euclides empieza por construir un triángulo equilátero

[6] Al recordar proposiciones del texto euclídeo indicaremos siempre con el primer número, en cifra romana, el libro, y con el segundo, en cifra arábica, la proposición.

ABD sobre AB (ver fig.10), y prolonga los lados DB, DA; trazando luego la circunferencia de centro B por C corta la

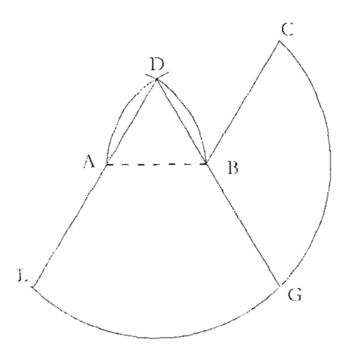


Fig. 10

prolongación de DB en G; trazando la circunferencia de centro D por G corta la prolongación de DA en L; el segmento AL responde al pedido.

Finalmente en I, 3 (ver fig.11) se supone dada la semirrecta AB que Euclides indica como “el segmento mayor”,

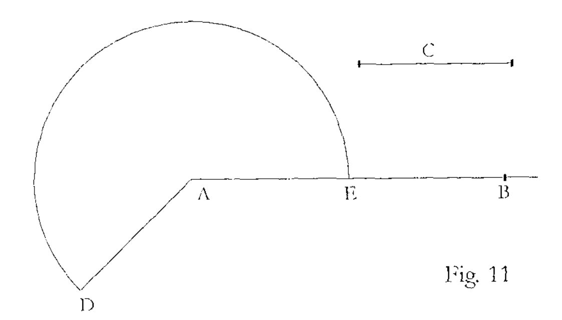


Fig. 11

para indicar que es indefinidamente extensible desde B, y supone dado un segmento C; para transportar C sobre AB,

Euclides supone que, aplicando I, 2, ya se ha construido un segmento AD de extremo A igual a C. Trazando el círculo de centro A por D, éste corta el segmento AB por E, obteniendo AE, que resuelve el problema.

A partir de este momento Euclides dirá frecuentemente "llevo tal segmento a coincidir..."; si el lector apresurado pensara entonces en cualquier instrumento transportador de segmentos en lugar de la larga construcción, no es culpa del autor.

Pero ¿qué significa todo eso?

En el moderno método axiomático nosotros postulamos: Dado un segmento, existe uno (único) igual sobre una semirrecta arbitrariamente asignada (con un extremo en el origen de ésta). Es la homogeneidad del espacio de la cual hablamos; pero nosotros no nos preocupamos del modo como aquella existencia se realiza; podría ser una medición, un transportador de segmentos; lo único que nos interesa es la deducción sucesiva. Euclides, para combatir al empirista que decía "medimos", o al otro que decía "tendemos una soga", debía realizar la igualdad por medio de una construcción estática, una figura permanente que asegurara toda la operación, aunque fuera sólo en la imaginación. El instrumento que permite efectuar la construcción es el círculo; pero no el círculo materialmente trazado por el movimiento continuo de un compás cualquiera, sino el círculo del cual el postulado 3 pide sea concedido existir con cualquier centro y por cualquier punto.

Debe atraer nuestra atención el hecho de que el significado orgánico de las tres primeras proposiciones deja muy pronto de ser entendido por los comentadores. Del comentario de Proclo aprendemos que al poco tiempo ellas se convierten en problemitas para ejercitaciones gráficas o para

sofisticaciones lógicas y escolásticas. Se discute primero si en el primer problema las intersecciones de las dos circunferencias podrían ser muchas, aun si las circunferencias, en vez de cortarse, no pudieran coincidir parcialmente. Estas cuestiones, en cuanto tengan de razonable, serán resueltas por Euclides en el Libro III; pero entonces él podrá disponer de los teoremas demostrados en el Libro I; aquí la cuestión no le interesa, puesto que sólo importa que la sucesión de operaciones indicadas, aun si hubiera indeterminación en alguna parte, lleve al resultado cuya univocidad está asegurada porque, según las nociones comunes, segmentos iguales con un extremo común no pueden sobreponerse sólo parcialmente (en nuestra geometría axiomática, sin referirse a nociones comunes, esta propiedad es todavía un postulado). Por el contrario, Proclo se extiende en examinar la multiplicidad de las realizaciones que la construcción puede presentar. Abstrayendo luego del fin último, concentra la atención sobre la construcción del triángulo equilátero, considerándola como demostración de existencia, y se pretende imitarla para construir también el triángulo isósceles y el escaleno. Debe notarse que, mientras del lado práctico la extensión es bien evidente, bastando, para construir el triángulo isósceles encontrar el punto de intersección de dos circunferencias de igual radio con centros en los extremos de la base, el problema principal, aquel del transporte del segmento, ha desaparecido una vez que se atribuye un propio sentido al "trazar una circunferencia *con radio dado* y centro arbitrario". Aparece como evidente que el comentarista admite el transporte rígido para el cual, sin ninguna duda, en todos los tiempos se tuvieron los instrumentos, pero que salía del campo de la concepción filosófica de Euclides.

Después del transporte del segmento debe Euclides resolver el problema algo más difícil de transportar el ángulo. Del mismo modo como el medio que permite resolver el primer problema es el círculo (no el compás, sino el círculo del postulado 3) igualmente el medio que permite la resolución del nuevo problema es el triángulo. Llegamos en efecto a la proposición I, 4, el teorema conocido como "primer caso de igualdad de los triángulos": *Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y un ángulo igual a un ángulo, aquel que está comprendido entre los lados iguales, los dos triángulos tendrán también la base igual a la base y serán iguales, y los ángulos restantes serán iguales a los otros ángulos restantes, cada uno a cada uno, los que comprenden lados iguales.*

No hay razón para admitir que la referencia a los ángulos hecha como conclusión deba considerarse como una inútil repetición de la afirmación de igualdad de los triángulos; y entonces el teorema nos dice que habremos resuelto el problema de transportar un ángulo dado cuando sepamos construir un triángulo al cual aquel ángulo pertenezca y del cual un ángulo sea tal que, con otro expediente, sepamos colocar dondequiera uno igual. Y no puede pasar desapercibido que los postulados 4 y 5 responden precisamente a estos requisitos, pues, una vez que se sepa construir el ángulo recto (prop. I, 11), por cuanto el post. 5 asegura que si una recta forma con uno de los lados un ángulo agudo, encontrará ciertamente el otro lado, se tiene el triángulo que sirve para transportar este ángulo. La observación coincide con la representación del ángulo por medio de la tangente y con el uso antiguo, ciertamente anterior a Euclides, del gnomon para la determinación de alturas; por otro lado, recuerda el manejo con el trián-

gulo rectángulo tan común en la geometría preeuclídea y que ya notamos hablando de la matemática socrática; igualmente puede recordarse la descomposición por Timeo de las caras de los poliedros en triángulos rectángulos. Debemos sin embargo reconocer que nada en el texto de los *Elementos* como ha llegado a nosotros permite afirmar positivamente tal conexión del grupo de proposiciones considerado.

La preparación proporcionada por las proposiciones I. 1, 2, 3 induce inmediatamente a la siguiente conclusión: dado un triángulo ABC, y dado un ángulo ∠EDF = ∠BAC, se sabe construir sobre los lados de ese ángulo los segmentos DE = AB, DF = AC; queda definido en modo unívoco un triángulo DEF; y pues, por la homogeneidad del espacio, existe un triángulo igual a ABC en el lugar caracterizado por el ángulo dado, éste no puede ser otro que ese DEF; será entonces EF = BC, ∠DEF = ∠ABC, ∠DFE = ∠ACB, que es la conclusión del teorema I, 4. La demostración que encontramos en el texto que nos ha sido conservado por Theon y por Proclo difiere de ésta por incluir explícitamente en su expresión un transporte rígido del triángulo ABC sobre DEF. No creo posible dudar de que se trata de una manipulación debida a que los geómetras posteriores al tercer siglo a. C. dejaron de entender una geometría abstraída de la realidad física, como lo hemos notado ya en los comentarios adjuntos a las proposiciones anteriores. Una comprobación está en el hecho de que la aludida demostración cree necesario confirmar la conclusión observando que, por coincidir los puntos E y F respectivamente con B y C, el segmento EF deberá sobreponerse a BC, *porque entre dos rectas no puede caber espacio*. Es ésta una de las muchas *nociones comunes* que se

encuentran enunciadas explícitamente sólo en algunas ediciones de los *Elementos* y que deben considerarse como apócrifas, porque el post. 1 ya dice que entre dos puntos no puede haber más que un segmento. El referimiento a tal noción se encuentra en el texto, en la forma en que nos ha llegado, todavía no más que una o dos veces; no presenta luego ningún esfuerzo conceder la corrupción en cada caso.

Lo inadecuado de la pseudodemostración del texto fue notado en seguida con el renacimiento científico. En 1557 Jacques Peletier[7] advierte que la prop. I, 4, más que un teorema debe considerarse como una definición. En 1658 Borelli en el ya citado *Euclidis restitutus*, al reproducir la demostración corriente, toma la precaución de declarar: *facta intellectuali superpositione,* haciendo la sobreposición intelectualmente, no materialmente, lo que no difiere, en la substancia de la consideración de homogeneidad arriba expresada. A fines del siglo XVIII, André Marie Legendre, en sus *Éléments de Géométrie*, que tanto mérito han tenido por otros respectos y que han adquirido tan grande preponderancia en la didáctica geométrica del siglo XIX, vuelve al lenguaje de la sobreposición material. En la geometría axiomática moderna, se transforma a menudo el teorema en postulado[8];

---

[7] JACOBI PELETARII, *in Euclidis Elementa geometrica demonstrationum libri sex*. Lugduni, 1557.

[8] El moderno concepto lógico de la matemática axiomática supone una extrema libertad en la elección de las proposiciones que se aceptan como base indemostrada de las deducciones siguientes; de aquí que es imposible afirmar en modo unívoco un punto de vista moderno;

así, David Hilbert en sus conocidos *Grundlagen der Geometrie* (1899) enuncia como axioma: Si dos triángulos ABC, A'B'C' son tales que AB = A'B', AC = A'C', ∠BAC = ∠B'A'C', entonces también ∠ABC = ∠A'B'C', y ∠ACB = ∠A'C'B'. La característica del concepto que está en la base de este enunciado es que la figura geométrica deja de ser considerada como una unidad para cambiarse en el conjunto de sus elementos; el triángulo es "tres puntos del plano", a los cuales están adheridos "tres segmentos y tres ángulos", y las afirmaciones sobre la igualdad de triángulos no deben significar más que relaciones por las cuales, de la igualdad de algunos de estos elementos, se infiere la igualdad de otros. A lo último es bien este mismo concepto el que hemos encontrado en Euclides cuando insiste, como conclusión final, en la igualdad de los ángulos; pero algo menos puro. Esta menor pureza se refleja en que Euclides, una vez fijados los vértices, infiere, como conclusión más inmediata, la igualdad de los lados; por el contrario, Hilbert hace resultar esta igualdad sucesivamente mediante deducción, por el absurdo.

Aun el primer caso de igualdad de los triángulos adquiere luego –reducido al tercer lado– categoría de teorema.

---

al mismo tiempo que Hilbert, siguiendo en lo esencial a Pasch y a Peano, adopta la forma que recordamos en el texto, Veronese construye la Geometría sobre la sola noción primitiva de la igualdad y desigualdad de segmentos; define entonces la igualdad de los ángulos por el llamado tercer caso de igualdad de los triángulos, y la postulación se refiere entonces a la invariabilidad del juicio de igualdad con variar los lados del triángulo constructor.

A la prop. I, 4 siguen:

I, 5. *En un triángulo isósceles los ángulos en la base son iguales; y si se prolongan los lados iguales, los ángulos por debajo de la base son iguales.*

I, 6. *Si en un triángulo dos ángulos son iguales, los lados que los subtienden serán iguales.*

I, 7. *Si de los extremos de un segmento están trazados dos segmentos a un mismo punto, no pueden trazarse otros dos segmentos respectivamente iguales a los primeros y terminados a otro punto, de la misma parte.*

I, 8. *Si dos triángulos tienen dos lados iguales respectivamente y tienen las bases iguales, tendrán también iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales.*

Los teoremas 5, 7, 8 conjuntamente nos dan la reducción a los postulados 1-3 del problema del transporte del ángulo, según aludimos poco antes. El 6 es la inversión de 5 y no tiene otra razón orgánica de estar en este lugar; razón importante, sin embargo, por corresponder a una costumbre rigurosamente mantenida en los *Elementos*.

La demostración del teorema 5 difiere de la que se acostumbra en los libros modernos, por cierta mayor complicación que vale considerar: si ABC es el triángulo isósceles (ver fig. 12), se prolongan los lados en segmentos iguales BZ = CG; luego, por aplicación de la prop. I, 4 a los triángulos ABG, ACZ se infiere

$$\angle ABG = \angle ACZ\ ,\ \angle AGB = \angle AZC\ ,\ BG = CZ$$

Luego, aplicando nuevamente la I, 4 a los triángulos BGC, CZB, se infiere

$$\angle ZBC = \angle GCB \text{ , } \angle BCZ = \angle CBG$$

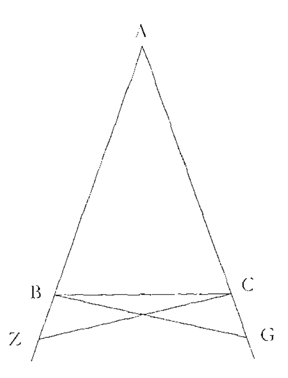


Fig. 12

La primera igualdad expresa sin más la igualdad de los ángulos debajo de la base; y asociando la segunda a la primera anterior se obtiene por diferencia la igualdad de los ángulos en la base. En los textos de hoy se aplica inmediatamente el primer criterio de igualdad de los triángulos (I, 4) a los dos triángulos BAC y CAB y se considera inútil ocuparse de los ángulos debajo de la base, que, en el caso que se tuviera que considerarlos, inmediatamente se reconocerían por iguales como suplementarios de ángulos iguales.

Se presenta la pregunta: ¿De dónde deriva que Euclides haya creído necesario tomar un camino tan largo?

Se puede pensar que Euclides haya creído necesario ayudar a la intuición de la diferencia, en la identidad, entre derecha e izquierda, para mostrar que algo había que demostrar,

evitando el abatimiento material del plano sobre sí mismo. El artificio de deshacer la simetría del propio triángulo viene a sustituir la postulación de la igualdad por simetría que hemos podido ver en la enunciación del postulado 4. La construcción de Euclides viene también a reparar el inconveniente de no haber hablado él mismo hasta ahora de ángulos suplementarios, mientras que para el completo desarrollo de la proposición siguiente (I, 7) es necesario conocer también la igualdad de los ángulos debajo de la base. Por eso, no habría sido lo mismo que el autor, en vez de prolongar los lados del triángulo, se hubiera contentado, para destruir la simetría del triángulo, con elegir los puntos Z y C sobre los propios lados.

Pero parece también interesante comparar la figura de Euclides con la que se presenta en la demostración aristotélica del mismo teorema; en la figura que sigue hemos rayado en modo análogo los ángulos que en las dos demostraciones

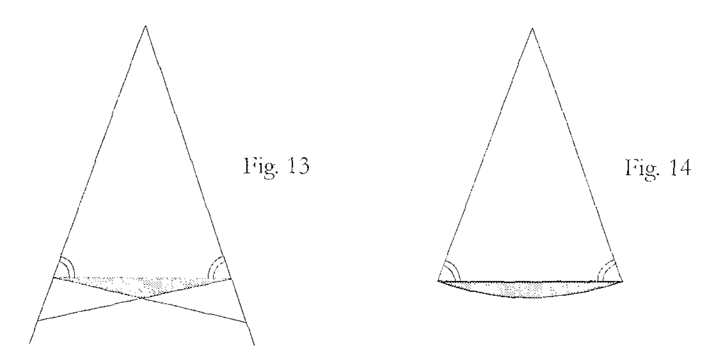

Fig. 13

Fig. 14

cumplen oficios análogos; unos son ángulos entre curvas (ver fig. 14), cuya igualdad resulta únicamente de una intuición

sobre la simetría; otros son ángulos rectilíneos (ver fig. 13) cuya igualdad resulta de un razonamiento sistemático.

La comparación parece sin embargo justificar la hipótesis de una influencia recíproca; en este caso, la demostración euclídea podría ser la transformación en forma deductiva de una antigua seudodemostración; y el hecho de encontrarse una en Euclides y la otra en Aristóteles, ser el testimonio de dos formas de razonar.

Una última observación interesante sobre la misma figura es la siguiente: Si imaginamos separadas en ella las partes

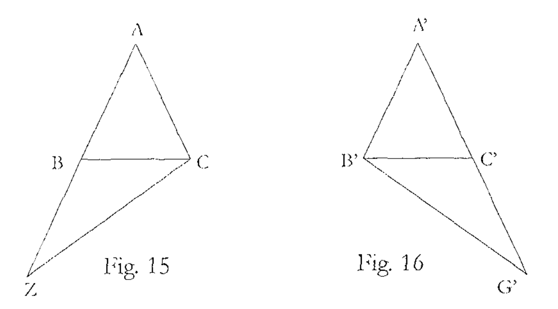


Fig. 15 Fig. 16

que se refieren a los dos lados del triángulo, repitiendo desde luego las líneas que sirven para una y otra parte, resultan las figuras 15 y 16; el hecho de que los triángulos ABC, A'B'C' sean isósceles puede considerarse como simplemente accidental, por cuanto basta suponer a priori la igualdad de los ángulos ABC, A'C'B' y tomar luego AB = A'C', BC = C'B', BZ = C'G' para inferir

$$\Delta ABC = \Delta A'C'B' \quad , \quad \angle CAB = \angle B'A'C' \quad , \quad AC = A'B'$$

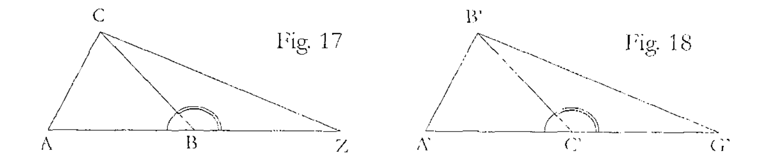
luego

$$\Delta ACZ=\Delta A'B'G' \quad , \quad \angle BZC=\angle C'G'B' \quad , \quad CZ=B'G'$$

y por fin

$$\Delta CBZ=\Delta B'C'G' \quad , \quad \angle CBZ=\angle B'C'G' \ ,$$

de lo que resulta que *ángulos suplementarios de ángulos iguales son iguales*; y aplicando la noción común 2, vemos que, apenas sabemos que sobre una semirrecta dada arbitrariamente se puede siempre construir un ángulo igual o uno dado, sigue



también que *ángulos llanos son iguales* por ser sumas de ángulos iguales. La observación, no precisamente en la misma forma, es de Hilbert, en los citados *Grundlagen*, donde observa que, por consiguiente, el postulado 4 resulta superfluo; pero, para la demostración fue necesario suponer la posibilidad de construir sobre las dos rectas ABZ, A'C'G' (ver figs. 17 y 18) un par de ángulos iguales ($\angle ABC = \angle A'C'B'$) *cualesquiera*, confirmándose por tanto el oficio que al postulado hemos atribuido anteriormente.

Pero, en el sistema euclídeo, también esta exigencia resulta satisfecha por otro camino como a continuación vamos a ver.

Dejamos la prop. 5, y saltamos la 6, que dejamos al cuidado del lector, por no ser urgente sistemáticamente y llega-

mos a la I, 7, cuya demostración se da por reducción al absurdo. Supongamos que, estando C y D de la misma parte del segmento AB (ver fig. 19), sea AC = AD, BC = BD; resulta que los dos triángulos ACD y BCD son isósceles; luego

$$\angle ACD = \angle ADC \quad , \quad \angle BCD = \angle BDC;$$

ahora observa Euclides que el ángulo BCD es parte de ACD, y ADC es parte de BDC; lo que contradice a la igualdad precedente.

Se observa en esta demostración que no todo está probado con rigor formal pues las enunciadas desigualdades entre ángulos pueden depender del modo como la figura absurda fue dibujada; ya los primeros comentaristas notaron que en caso de que el punto D fuese interior (ver fig. 20) al

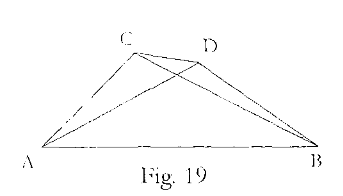


Fig. 19

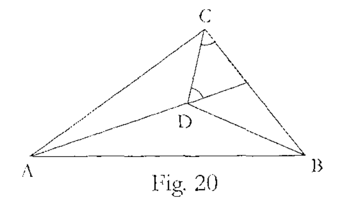


Fig. 20

triángulo ABC (o C interior a ABD), para llevar a cabo la demostración sería necesario utilizar la igualdad de los ángulos debajo de la base para uno de los dos triángulos isósceles. Se observa sin embargo que es costumbre de Euclides –cuando la figura puede dar lugar a varias distribuciones en sus elementos– desarrollar sus demostraciones sólo para uno de los casos posibles; y la investigación de las variantes que se hacen necesarias en los otros casos fue uno de los ejerci

cios preferidos por los escoliastas; el enunciado que forma la 2ª parte de I, 5 podría demostrar que Euclides no desconoció este segundo caso.

La prop. I, 8 no difiere esencialmente de I, 7; dados dos triángulos de lados iguales ABC, DEF (con AB = DE, BC = EF, CA = FD), sobre EF y de la misma parte de DEF existe (por

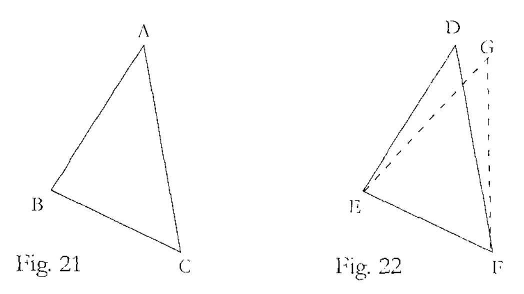


Fig. 21 Fig. 22

las razones de homogeneidad del espacio a las cuales nos hemos referido varias veces) un triángulo EFG igual a BCA. El teorema I, 7 dice que debe el punto G coincidir con D; de aquí que el ángulo ∠EDF = ∠EGF; y como por definición ∠EGF = ∠BAC, resulta ∠EDF = ∠BAC.

Importa notar que, aunque el teorema sea el que en la costumbre moderna se ha dado en llamar "el tercer criterio de igualdad de los triángulos", de tal igualdad no habla el enunciado, sino únicamente de la igualdad de los ángulos BAC, EDF; no parece dudosa por lo tanto la interpretación que le dimos de hacer juego con la prop. I, 3 en proporcionar el modo de transportar el ángulo, en aplicación de los postulados 1, 2, 3; únicamente puede extrañarnos que Euclides haya demorado hasta la prop. I, 23 para presentar tal aplicación, lo

que podemos justificar por la razón práctica de que, en efecto, sólo en la siguiente prop. I, 24 se vuelve necesaria la operación. No vale, al contrario, una explicación teórica que parece emerger de la colocación de I, 23 después de I, 21 y I, 22, donde se dan las condiciones para que con tres segmentos dados pueda efectivamente construirse el triángulo, porque en el caso actual esos segmentos serán, por definición, iguales a los lados de un triángulo existente en algún lugar y que, por lo tanto, tendrá uno igual en cualquier otro lugar.

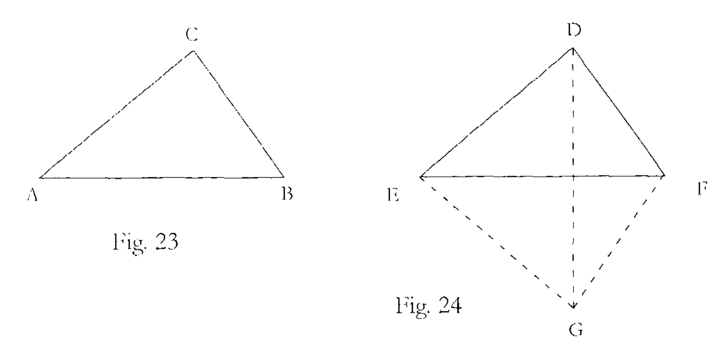


Fig. 23

Fig. 24

En los libros modernos la proposición I, 8 se demuestra sin pasar por I, 7 suponiendo sobre EF un triángulo igual a ABC, pero de la parte opuesta a D (ver figs. 23 y 24). La demostración depende todavía sólo de I, 5 y la distinción de casos que también en esta forma se necesita resulta de discusión mucho más simple.

Recordamos todavía que el llamado "segundo criterio de igualdad de los triángulos" está remitido por el autor a mucho más tarde, a la prop. I, 26; la demostración se hace por absurdo y no difiere en su razonamiento de I, 6; debemos luego pensar que la razón por la cual Euclides lo atrasa

es únicamente que él no tiene ninguna necesidad urgente para proceder en construirlo y que más tarde lo incluirá en un enunciado más general.

A I, 8 siguen las demás construcciones fundamentales: I, 9 - bisección del ángulo; I, 10 - bisección del segmento; I, 11 y 12 - perpendicular a una recta en un punto y desde un punto; e implícitamente queda demostrado que todos los ángulos rectos son iguales (el pretendido postulado 4), bastando que, al efectuar la construcción de la perpendicular sobre dos rectas distintas, se usen segmentos iguales.

Abandonemos por ahora el Libro I, en el cual se siguen las proposiciones que más o menos forman el núcleo fundamental de la tradicional geometría plana; sobre ellas volveremos en los capítulos siguientes.

Queremos, en conexión con lo que precede y se relaciona esencialmente con la noción de igualdad geométrica, dirigir la vista hacia figuras un poco más complicadas, y en primer lugar a las curvas.

La extensión de la noción de igualdad geométrica se hace modernamente sólo a través de la correspondencia general de congruencia como transformación del espacio en sí mismo. Se define esta correspondencia por el hecho de que ella conserva la distancia de puntos correspondientes y, sobre la base de los teoremas de igualdad de los triángulos, se demuestra que la definición es consistente, es decir, no contradictoria y que la correspondencia es unívocamente definida cuando se conoce un número finito de pares de puntos homólogos (por ejemplo, para la congruencia plana, 3 no alineados y los 3 homólogos). En la geometría elemental se prefiere generalmente definir por separado la noción de igualdad para deter-

minadas figuras fundamentales, y en cuanto nos quedamos con las limitaciones euclidianas y con la geometría plana, basta precisamente considerar todavía los círculos, arcos, etc. Y así lo hace el mismo Euclides en el Libro III, pero con una diferencia esencial; mientras que, con el fin de evitar dificultades, se considera actualmente lo más conveniente aceptar como definición de la igualdad de los arcos de círculo la de tener radios iguales y ser contenidos en ángulos al centro iguales, Euclides *demuestra* esta propiedad, refiriéndose, para la definición, a las nociones comunes y con un procedimiento cuya afinidad con las prop. I, 7, 8 merece ser señalada.

El Libro III empieza con algunas definiciones:

1. *Círculos iguales son aquellos cuyos diámetros son iguales, o cuyos radios son iguales.*
6. *Segmento de círculo es la figura contenida entre un segmento de recta y un arco de círculo.*
7. *Ángulo de un segmento es aquel contenido entre la recta (base) y la circunferencia.*
8. *Ángulo en el segmento es el ángulo contenido entre dos rectas que unen un punto del arco con las extremidades del segmento de recta que es la base del segmento*[9].
9. *Y si los lados del ángulo comprenden el arco, se dice que el ángulo abarca el arco.*
11. *Se dicen semejantes segmentos de círculos cuando admiten ángulos iguales* o *son iguales los ángulos en ellos.*

---

[9] Nótese que la definición de la *base del segmento* habría estado en su lugar como complemento a la def. 6, y habría servido para expresar más claramente la 7. Lo que significa únicamente descuido y corrupción.

Todavía debemos notar que estas definiciones no deben entenderse sino como aclaraciones de vocabulario La 1 podría bien asemejarse a una definición nominal de la igualdad de círculos, si no estuviera con las otras y si no contuviera el duplicado de hablar de diámetros y de radios. En cuanto a las otras, son ciertamente definiciones nominales las 6, 7 y 9; pero 8 y 11 suponen el teorema que afirma la igualdad de los ángulos en un mismo arco.

Dicho esto, notamos que la igualdad afirmada en la def. 1 está contenida en el post. 3 y en la noción común 4, por intermedio de la prop. I, 3, pues, si dos círculos tienen radios iguales, esta I, 3 nos enseña a sobreponerlos y por consiguiente a sobreponer las circunferencias. La afirmación relativa a los diámetros podría referirse a las semicircunferencias, consideradas como arcos que tienen por base un diámetro, y, en este respecto, la igualdad entra como caso particular en lo que vamos a decir.

En la prop. III, 20 Euclides demuestra que un ángulo en la circunferencia es igual a la mitad del ángulo en el centro que abarca el mismo arco, en modo idéntico a lo que se hace en todos los libros elementales, por tanto, no vamos a insistir al respecto; con eso adquieren sentido las definiciones 8 y 11 (cf. III, 21). Dejando ahora de lado la prop. III, 22, que aplica la 21 a demostrar que en un cuadrilátero inscripto la suma de los ángulos opuestos vale dos ángulos rectos [10], lle-

---

[10] Es interesante notar en esta proposición, desde el punto de vista metodológico, que Euclides, en modo elegantísimo, la hace depender de la suma de los ángulos de un triángulo, evitando la consideración de la mitad del ángulo-giro; escrúpulo análogo va a demostrar en la prop.

gamos al grupo III, 23 a 29, en las cuales se caracteriza la igualdad de los arcos de circunferencia.

Leemos:

III, 23. *Sobre la misma cuerda y de la misma parte de ella, no pueden existir dos segmentos de círculo semejantes desiguales.*

III, 24. *Segmentos semejantes sobre cuerdas iguales son iguales entre sí.*

He aquí la demostración de la primera, donde ponemos, al lado de la figura correspondiente, la que sirvió para demostrar I, 7; el lector debe observar la analogía del dibujo y del razonamiento (ver figs. 25 y 26):

Si sobre la cuerda AB, de la misma parte, existieran dos segmentos semejantes, tracemos la recta AC que corta ulte-

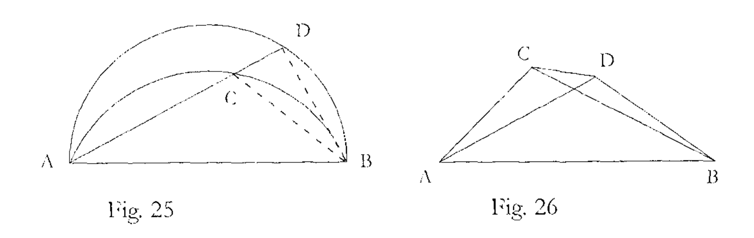


Fig. 25 Fig. 26

riormente a los dos en puntos distintos CD; por la hipótesis de que los dos segmentos son semejantes, será ∠ACB = ∠ADB; pero respecto del triángulo BCD, el ángulo ∠ADBes

III, 31, donde instituye un razonamiento *ad hoc* para mostrar que el ángulo inscripto en la semicircunferencia es recto, en lugar de referirse a III, 20; de allí, por III, 24, resultará la igualdad de las semicircunferencias de igual diámetro, a la cual nos referimos anteriormente.

interno y ∠ACB es externo, no adyacente; lo que contrasta con la igualdad.

Para demostrar la prop. III, 24, basta ahora pensar, análogamente a lo que se hizo en I, 8, que, si dos segmentos AEB y CGD [11] tienen bases iguales, existirá sobre CD un segmento igual a AEB; y puesto que por hipótesis, AEB y CGD son semejantes, se tendría así sobre el mismo segmento CD dos segmentos semejantes, salvo el caso en que dicho segmento igual fuese precisamente el CGD.

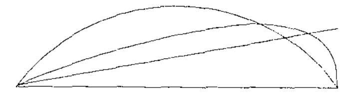


Fig. 27

Es curioso notar que en la demostración que nos ofrecen las ediciones de los *Elementos*, a la simple observación anterior se agrega la consideración de la hipótesis alternativa de que el segmento CGD y el segmento igual a AEB sobre CD pudieran cortarse en un punto Z; y se excluye tal hipótesis por haber demostrado en III, 10 que dos circunferencias no pueden tener más que dos puntos comunes (ver fig. 27). Es evidente que, si tal consideración fuera necesaria, ya lo habría sido en III, 23; pero para que el razonamiento expuesto en la demostración de esta proposición sea concluyente es suficiente suponer que existe sobre uno de los arcos un punto que no pertenece al otro. Por lo tanto, en cualquier caso la hipótesis alternativa recordada debe considerarse como una interpolación.

[11] El lector dibujará fácilmente la figura.

Una referencia a la prop. III, 10 podría todavía justificarse aquí para completar el teorema de la igualdad de los segmentos (en el sentido de la noción común 4) mediante la afirmación de que ellos pertenecen a circunferencias iguales (en el mismo sentido). Euclides lo hace de otra manera con la siguiente prop. III, 25, donde propone: *dado un segmento, prolongar la circunferencia a la cual pertenece.* Por eso, traza la perpendicular en el punto medio de la base del segmento y construye un triángulo isósceles cuya base es la cuerda AB y con uno de sus lados sobre dicha perpendicular (ver fig. 28). El

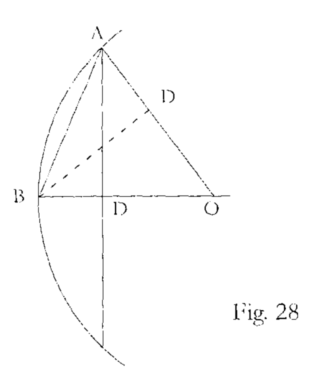


Fig. 28

vértice es el centro de la circunferencia. Es notable que, para determinar tal centro, la demostración de la prop. III, 10 ya daba una construcción, la misma muy conocida y todavía reproducida en IV, 5 para circunscribir un círculo a un triángulo [12], ¿por qué indicar entonces aquí otro camino?

[12] La observación se encuentra, por ejemplo, en Tartaglia.

Podemos observar que la nueva construcción, evitando construir una nueva perpendicular (pues se reduce a formar el triángulo BAD' *igual a* ABD), es esencialmente más corta.

Para terminar nuestro estudio sobre la igualdad geométrica en la obra de Euclides, debemos todavía dar una rápida recorrida al Libro XI. Este libro representa, para la estereometría, más o menos el contenido de los Libros I, III y VI respecto de la planimetría; y es opinión común que su perfección es mucho menor. No queremos extrañarnos de eso, mientras sabemos que una opinión parecida la tenía el mismo Sócrates; acaso podríamos pensar que, si el maestro vio las insuficiencias, con más razón habría tenido el discípulo que sentir la obligación de colmarla; podríamos discutir que la opinión de Sócrates sale de la pluma de Platón, el cual, al menos por la larga vida que tuvo, resulta posterior a Theetetes. Pero de todos modos debemos disculpar al autor porque la obra ya se hacía larguísima y el programa de ofrecer un modelo de rigor deductivo estaba, en relación con este fin estricto, ampliamente cumplido. Por fin, la estereometría es, por su naturaleza, más complicada que la planimetría –y lo vemos en la costumbre que se ha mantenido en los siglos de reservar a ésta el lugar máximo en la didáctica geométrica–; en consecuencia más penoso resulta sostener en ella el mismo cuidado para los detalles. En efecto, volveremos a admirar a Euclides cuando, en vez de pretender la perfección del conjunto, fijemos nuestra atención sobre argumentos particulares y consideremos el rigor y muchas veces la finura con la cual elude las dificultades imponiendo a sus razonamientos el desarrollarse siempre en consideraciones de geometría plana, de modo de utilizar siempre y únicamente los primeros postulados.

Al igual que el Libro I, el XI empieza con una larga lista de definiciones, veintiocho; muy poco satisfactorias ciertamente a la luz de la pura lógica; pero tampoco eran satisfactorias las del Libro I, y dijimos que debe admitirse que Euclides no quisiera hacer allí más que un pequeño diccionario para ayudar al lector. Hay algunas proposiciones, como la 1 y la 2, y algunos incisos en otras, que se pueden quitar sin dañar nada y que contienen seudo-razonamientos chocantes sobre el tipo de la noción común afirmando que entre dos segmentos no cabe un espacio; podremos considerarlas como apócrifas, como lo hicimos para ésta. También es bien cierto que en la definición de los cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) se abandona todo escrúpulo contra la generación por movimiento continuo; pero tal generación no tiene ningún efecto sobre los razonamientos, porque éstos están rigurosamente contenidos en consideraciones sobre las secciones normales. Es posiblemente esta obligación que se hace Euclides de no salirse del plano, la razón de una laguna que la obra presenta al ignorar completamente la geometría esférica, la que era bien conocida por astrónomos y geodestas.

La prop. XI, 1 afirma que una recta que corre parcialmente sobre un plano no puede separarse de él. La demostración no rige a la crítica; pero los postulados 1 y 2 nos dicen que la recta que pasa por dos puntos es única y durante todos los razonamientos planimétricos nunca se dudó de que la recta por dos puntos de un plano pudiera levantarse de él; por lo tanto, hay que suponer que se trata de un postulado sobreentendido y debe considerarse la seudodemostración como una interpolación. Lo mismo debe decirse para la prop. XI, 2, que afirma que si dos lados de un triángulo están sobre

un plano, sobre el mismo yace también el tercer lado. Debemos luego pensar que si Euclides consideró conveniente recordar estos hechos, tuvo que ser más bien como escolio que como teorema. La prop. XI, 3 afirma que dos planos que tienen puntos comunes se cortan según una recta; Euclides admite tácitamente que estos puntos no sean menos que dos, sin notar que se trata en verdad de un postulado comparable con el 5; notaremos solamente que, con muchos sistemas geométricos que se han producido después, la observación es muy reciente, posiblemente expresada por primera vez por V. Staudt.

Después de estos preliminares, el libro entra a hablar de rectas y planos perpendiculares. Prop. XI, 4: *Si dos rectas se cortan en un punto y una tercera por este punto es perpendicular a las dos, ella es perpendicular al plano que las contiene.* Sean en efecto AB, CD las dos rectas que se cortan en E y sea FE la tercera

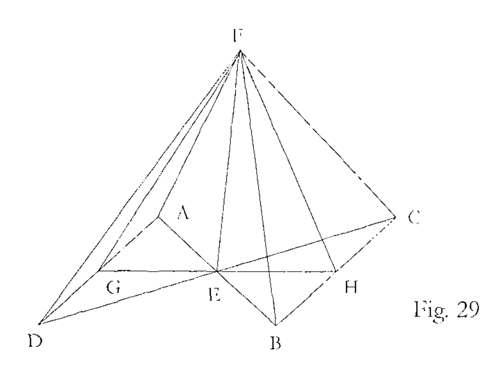


Fig. 29

recta. Tomemos EA = EB; EC = ED. Considerando en el plano FAB el triángulo de los tres puntos resulta FA = FB;

análogamente, en el plano FCD, FC = FD; por fin, en el plano EAC, por la igualdad de los triángulos AED, BEC, AD = BC. Tracemos en este último plano, una recta por E que corta las rectas AD, BC respectivamente en G y H; será entonces EG = EH, AG = BH. Considerando ahora los triángulos iguales FAD, FBC, resulta FG = FH y finalmente el triángulo FGH es isósceles y FE es perpendicular a EG.

En los libros modernos se exhibe ordinariamente una variante en la cual, considerando un punto K simétrico de F respecto de E se ahorran varias líneas; la demostración queda substancialmente la misma y permanecemos completamente en el plano de las proposiciones I, 4 a I, 8.

XI, 5 es la proposición inversa.

Pasemos a considerar la prop. XI, 6: *Si dos rectas son perpendiculares al mismo plano, ellas son paralelas.* Lo esencial, debe notar el lector, es demostrar que la hipótesis de ser las dos rectas perpendiculares al mismo plano lleva consigo la coplanaridad de ambas.

Sean AB, CD las dos rectas; B y D sus puntos sobre el plano; la recta BD será en seguida perpendicular a las dos.

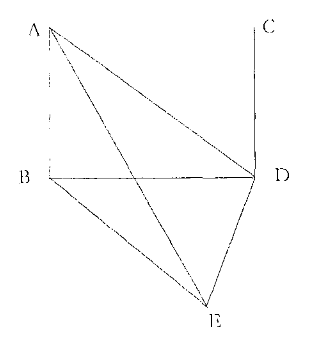


Fig. 30

Ahora Euclides traza en el plano una recta DE perpendicular a BD y toma los segmentos AB, DE iguales; entonces serán iguales los triángulos ABD y EDB; luego AD = EB y los triángulos ADE y EBA resultan iguales por igualdad de los lados; como se sabe, por hipótesis, que ∠ABE es recto, lo será también ∠ADE, es decir que las tres rectas CD, AD, BD, perpendiculares a la misma recta DE son coplanares, por XI, 5.

En los libros modernos, de esta proposición se ha separado la parte que se refiere a las rectas AB, BD, DE constituyendo el llamado *teorema de las tres perpendiculares*, que encuentra otras múltiples aplicaciones; además, siguiendo a Legendre, se ha abandonado el artificio de tomar AB = DE y se lo ha sustituido con prolongar ED en un segmento DF = DE; el razonamiento sigue entonces más análogo al usado en el teorema anterior, obteniéndose mayor uniformidad y mayor sencillez. Pero el lector, reflexionando sobre el hecho conocido de que en las demostraciones matemáticas simplicidad y elegancia aparecen siempre como últimas, no puede eludir la admiración por la sutileza de Euclides en buscar el artificio.

No queremos llevar al lector a través de todo el libro, pero nos gustaría detenernos todavía a admirar igual sutileza en la construcción de un triedro del cual están dadas las caras (XI, 23); la construcción tiene aquí importancia fundamental como demostración de que las relaciones entre esas caras que en los teoremas anteriores se habían encontrado como condiciones necesarias (cada cara debe ser menor que la suma de las otras dos y la suma de las tres debe ser menor que cuatro ángulos rectos) son también suficientes para que tres ángulos dados sean caras de un triedro, constituyendo así la proposición básica de la teoría de los poliedros; y el problema

que se le presenta a Euclides es el de alcanzar una construcción necesariamente espacial por medio de razonamientos, desarrollándose todos, en cada momento, sobre un plano determinado. Empieza con demostrar que, si los tres ángulos dados realizan la primera condición, las bases de triángulos isósceles cuyos lados sean iguales a un segmento fijo y cuyos ángulos al vértice sean los asignados pueden servir para construir un triángulo; la condición relativa a la suma de los tres ángulos se refleja entonces en que el radio del círculo circunscripto a ese triángulo es menor que aquel segmento; puede por lo tanto construirse un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento fijo y un cateto es dicho radio. La pirámide que tiene por base el triángulo anterior, por altura el segundo cateto y el centro del círculo circunscripto a la base como pie de esa altura tiene por ángulo en el vértice el triedro que se quería construir.

El teorema demostrado con esta construcción es el fundamento de todas las sucesivas demostraciones de igualdad, semejanza, equivalencia de los poliedros. Debemos por tanto añadir una observación; entre las definiciones que encabezan el libro encontramos:

Def. 9. *Son figuras sólidas semejantes las comprendidas por caras semejantes en igual número.*

Def. 10. *Figuras iguales y semejantes son las comprendidas por caras semejantes e iguales en número y magnitud.*

Debe extrañar que análogas definiciones no se encuentran en los libros planimétricos; en el Libro I no se encuentra necesidad de definir la igualdad geométrica de polígonos, por cuanto resulta definida axiomáticamente por la igualdad

lógica y las nociones comunes (con el resultado de reunir bajo el mismo nombre también la equivalencia); en el Libro VI se definen las figuras rectilíneas semejantes por la igualdad de los ángulos y proporcionalidad de los lados. Nada justifica que para los poliedros Euclides haya creído necesario dar una definición *ad hoc* para la igualdad; y una definición, además, defectuosa por no tener en cuenta la igualdad de los diedros. Si, por otra parte, tenemos en cuenta que la construibilidad unívoca es garantía de igualdad, vemos que la def. 10 aparece superflua y su más probable explicación es la de añadidura por algún comentarista que, habiendo olvidado los puntos de partida, encontró la necesidad de definir la igualdad de poliedros, puesto que en los teoremas se la nombraba y que, en efecto, al criterio resumido en esta definición parece entonces referirse el autor (véanse las prop. XI, 27 a 34). ¿Debemos creer que Euclides habría olvidado completamente la necesidad de asegurarse también de la igualdad de los diedros? Admitiendo que hubo interpolación no tenemos elementos para hacerle ese cargo. La razón por la cual Euclides puede pasarse de nombrar a los diedros estriba en que prácticamente no le sirven otros angoloides que triedros, cuya igualdad, por XI, 23, ya está asegurada por la igualdad de las caras; pero vale notar que aun falta en los *Elementos* un término equivalente a la palabra "diedro". Puede pensarse que Euclides viera alguna dificultad a causa de su propósito de usar siempre razonamientos planimétricos; el concepto aparece en las definiciones únicamente como medida, llamándose inclinación de un plano sobre otro el ángulo plano que es sección recta del diedro (XI, def. 6).

Hay que notar que debemos llegar al siglo XIX con Cauchy para que los geómetras se preocupen por fijar límites a la validez de la definición 10. Se puede, efectivamente, afirmar la igualdad geométrica de dos poliedros por la sola consideración de las caras bajo la condición de tratar únicamente con poliedros convexos [13]; pero el teorema, muy bello en sí, no lo necesitaba a Euclides.

[13] Ver CAUCHY: Journal de l' École polytechnique 16. DEHN, M.: *Über die Sterrheit convexer Polyeder.* Math. Ann. 77, 1916. M. TURCHETTI: *Il teorema di Cauchy sulla determinazione di un poliedro mediante le sue facce.* Periodico di Matematica, 1927.

II

La Suma de los Ángulos de un Triángulo y el Postulado V

Volvamos con nuestra lectura al lugar donde dejamos el Libro I.

Vimos entonces que a la prop. I, 8 sigue una serie de construcciones, cuya máxima importancia, desde el punto de vista conceptual, reside posiblemente en dar significado al término "ángulo recto". Sin detenernos mayormente sobre ellas, llegamos finalmente a las proposiciones:

I, 16. *En cada triángulo, al prolongar un lado, el ángulo externo es mayor que cada uno de los dos internos opuestos.*

I, 17. *En cada triángulo dos ángulos cualesquiera tienen suma menor que dos rectos.*

Las dos proposiciones son equivalentes; y en efecto la segunda no es más que un corolario de la primera; pero el lector tiene razón en preguntarse: ¿Ignora pues Euclides que la suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos ángulos rectos? Y, si lo sabe, ¿por qué enuncia tal proposición, bastante estúpida por substituir la afirmación indeterminada de *ser menor*, cuando es posible enunciar exactamente el valor de la diferencia entre los dos términos que se comparan? Una proposición que está sin más comprendida dentro de la noción común 5, según la cual la parte es menor que el todo.

Así es verdaderamente; el teorema de la suma de los ángulos del triángulo es demostrado por Euclides como prop. I, 32 con una demostración que no difiere substancialmente de la habitual aún hoy y que, como se hace en la actualidad, podía darse uniendo el postulado 5 con el razonamiento mismo que sirve para la demostración de I, 16, pero sin tampoco ocuparse de la conclusión de éste; y por otra parte, no se puede dudar de que el teorema fuera conocido mucho antes de Euclides y de Theetetes. Ya notamos que muchas razones medio racionales, principalmente de homogeneidad y simetría, hicieron ciertamente admitir muy temprano las propiedades del rectángulo; y si la suma de los ángulos del rectángulo es 4 rectos, la diagonal lo divide en dos triángulos rectángulos iguales, cuya suma de los ángulos será luego dos rectos. Por otra parte, leyendo el *Timeo* nos damos cuenta de que en el tiempo de Platón era habitual considerar todo triángulo descompuesto en dos triángulos rectángulos por una altura, lo que transfiere a ese triángulo cualquiera la propiedad conocida para cada uno de éstos.

Debemos luego pensar que si Euclides demoró tanto en presentar un teorema tan fundamental, tan conocido y también tan intuitivo, tuvo que ser con un propósito.

La prop. I, 27 afirma que *si una recta corta a dos otras formando con ellas ángulos alternos iguales, las dos rectas serán paralelas* (es decir, no se cortan entre sí). La demostración más inmediata por intuición estriba en la simetría, que no pudo escapar a la consideración de Euclides, pues en el enunciado no indica mayormente a cuáles ángulos alternos queremos referirnos; ella se reduce entonces a observar que, si $\angle AEF = \angle EFD$ y luego $\angle BEF = \angle EFC$ y si, por absurdo, AB y CD se encon-

traran en un punto G, construyendo el triángulo HEF = GFE con el vértice H de la parte opuesta de G con respecto a la recta EF, deberían las rectas HE, HF ser las mismas AB, CD, es decir, se tendrían dos rectas distintas uniendo los mismos puntos H, G. Esta demostración, que se encuentra a menu-

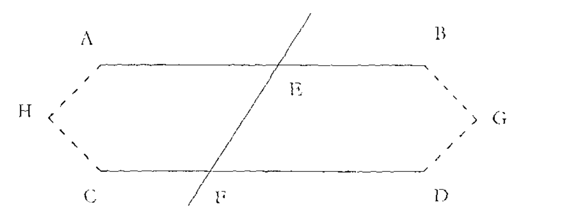


Fig. 31

do en nuestros tratados de geometría elemental, es de origen muy antiguo y se atribuye a Tolomeo; su estilo es perfectamente euclidiano. Puede observarse que la consideración del triángulo HEF = GFE supone el segundo caso de igualdad de los triángulos, que Euclides establece solamente como prop. I, 26; pero la demostración que de él da podía transportarse sin variación, como también se hace hoy día, inmediatamente después de la I, 4, y la posición que le da el autor sólo demuestra otro interés sistemático del cual hablaremos en seguida. Euclides busca el absurdo, no en la I, 26 sino en la I, 16. Ahora bien, si a la figura que sirve para demostrar I, 16 (ver fig. 32) la transportamos sobre la referente a la demostración de I, 27, vemos que ella no es más que una construcción del punto H, simétrico de G respecto del punto M, medio del segmento EF. También Euclides podía inferir directamente la verdad de I, 27, como indicamos arriba, sin

referirse a I, 16 ni a I, 26. La I, 16 viene precisamente a aislar de la demostración de I, 27 –que podía ser el fin esencial

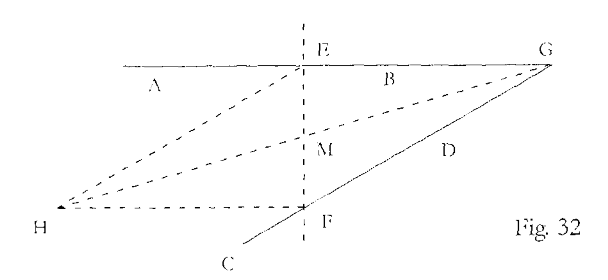


Fig. 32

del autor– el hecho particular de que ∠EHF = ∠GFE (o igualmente ∠HFE = ∠GEF); esto es, representa I, 16 el resultado de un análisis y discriminación.

Y lo notable es que, después de haber separado esta partícula, el autor se extiende en aplicaciones, a lo largo de 10 proposiciones más, antes de llegar a la conclusión esencial que las habría abarcado todas bajo una noción conocida y de común intuición.

He aquí la demostración de I, 16: sea el triángulo ABC (ver fig. 33); dividamos por la mitad el lado AC en E y, trazando BE, prolonguemos la recta en un segmento EF = BE; trazando FC el triángulo CFE resulta igual a ABE por tener los ángulos ∠AEB = ∠CEF, opuestos en el vértice, y los lados que los comprenden iguales; luego, ∠ECF = ∠EAB, ∠CFE = ∠ABE, FC = AB. El punto F es interior al ángulo ACD; luego ∠ACD > ∠ACF = ∠CAB.

La construcción puede repetirse análogamente cambiando los lados AC y BC; resulta entonces ∠BCG > ∠CBA.

pero ∠BCG = ∠ACD por opuestos en el vértice; se sigue que también ∠ACD > ∠CBA, es decir que el ángulo ∠ACD es

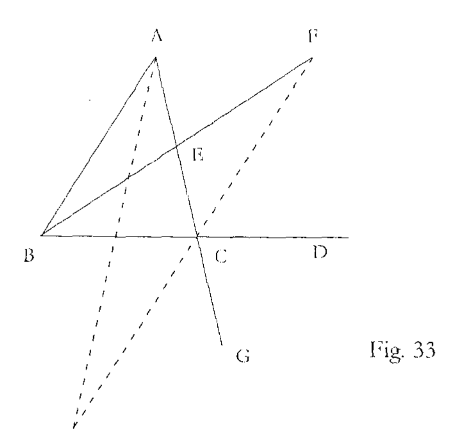


Fig. 33

mayor que cada uno de los ángulos internos opuestos del triángulo, que es la tesis.

Ahora Euclides establece, con las prop. I, 18 y I, 19, como aplicación de I, 16, los dos teoremas recíprocos entre sí según los cuales en cada triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo; y, como aplicación de I, 19, con demostración idéntica a una que acostumbra todavía, con I, 20, la propiedad de que cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos; esto es, la propiedad de mínimo recorrido del segmento rectilíneo con respecto a cualquier poligonal que una los extremos. Este sentido del teorema está confirmado al comparar, en I, 21, las sumas de los lados de dos triángulos con base común, uno de los cuales tiene el vértice interior al otro triángulo. Vale la pena recordar que Arquímedes y Legendre tomarán esta propiedad de mínimo como

primitiva, lo cual, si en el primero puede entenderse sólo como la referencia a un teorema conocido, constituye una nota esencial a favor de Euclides con respecto a Legendre, en relación a la estructuración lógica de los principios de la Geometría. Como consecuencia del problema lógico-geométrico surgido de la consideración de los inconmensurables, Euclides podía comparar segmentos por sobreposición (en el sentido de las prop. I, 1-3), pero no podía medir, y no tenía sentido hablar de mínimo recorrido antes de saber transportar segmentos.

Por fin, todavía como consecuencia de I, 20, se demuestran en I, 24, 25 los dos teoremas, inversos entre sí, expresando que si dos triángulos tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos desigual, el tercer lado será mayor en el triángulo que tiene ángulo mayor.

I, 26, como ya dijimos, es el segundo caso de igualdad de los triángulos, pero con el complemento de que, si los dos triángulos, teniendo dos ángulos respectivamente iguales, tienen igual a su homólogo un lado que no sea el que une los vértices de dichos ángulos, todavía se afirma la igualdad. Cuando se sabe que la suma de los ángulos del triángulo es constante, dos ángulos rectos, de la hipótesis de que dos ángulos son iguales a dos ángulos se sigue que los dos triángulos tienen los tres ángulos respectivamente iguales; no hay por tanto lugar para el complemento. Pero Euclides ignora a propósito la proposición fundamental que permite identificar los dos casos. El hecho de que, teniendo a la mano una solución tan simple y tan satisfactoria para quien únicamente buscara la verdad geométrica, haya buscado otra, con ayuda de la prop. I, 16, es una demostración de la admirable finura críti-

ca que ha acompañado la concepción de los *Elementos*. No nos parece exagerado concluir que la primacía que se atribuye a veces a Jerolamo Saccheri, por haber ofrecido con su *Euclides ab omni nevo vindicatus* un primer esbozo de geometría no-euclidiana, puede con buena razón y probablemente con más profunda conciencia, atribuirse al mismo Euclides. Tenemos en el grupo examinado de 11 proposiciones un verdadero pequeño tratado de geometría pre-no-euclidiana; no ciertamente con vista al interés por una geometría general según el estilo moderno, sino con el fin de medir la potencia deductiva del espíritu y de demorar lo más posible el uso de un postulado, que la experiencia y la intuición daban como evidente; tan evidente que posiblemente ya en aquel tiempo no podía rechazarse por la generalidad la ilusión de su necesaria demostrabilidad.

Pero más admirable todavía será el hecho de que después de tal esfuerzo, Euclides supo defenderse de la ilusión de alcanzar la demostración, en la cual han caído tantos geómetras posteriores. A dar aliento a esa ilusión hay que pensar tuviera que servir el mismo teorema I, 16. En efecto, la construcción que sirve para la demostración hace derivar del triángulo dado ABC otro ACF en el cual un ángulo resulta igual a la suma de dos ángulos del primitivo:

$$\angle ACF = \angle ACB + \angle ABC$$

mientras la suma de los otros dos es igual al tercer ángulo del primer triángulo:

$$\angle BAC = \angle FAC + \angle CFA$$

No es posible suponer que este hecho haya pasado inadvertido al autor; de ello se sigue de inmediato que aplicando repetidamente la misma construcción, se puede formar un triángulo en el cual la suma de los ángulos sea siempre la misma del triángulo dado, pero tal que la casi totalidad de esta suma se concentre en un solo ángulo, mientras que la suma de los restantes resulta tan pequeña como se quiera. Basta razonar como sigue: sean a, b, c los ángulos del triángulo dado; aplicando una primera vez la construcción se obtendrá un triángulo en el cual un ángulo vale $a + b$ y los dos restantes tienen por suma c; llamando b' y c' a estos dos ángulos ($b' + c' = c$), supongamos que sea $b' > c'$; será $c' < c : 2$. Aplicando entonces a este triángulo la construcción, se obtendrá un triángulo en el cual un ángulo vale $a + b + b'$, y los otros dos, que llamaremos b'' y c'', tienen por suma c'; suponiendo que sea $b'' > c''$, será $c'' < c' : 2 < c : 4$. Aplicando luego nuevamente la construcción se obtendrá un nuevo triángulo en el cual un ángulo vale $a + b + b' + b''$ y los dos restantes b''' y c''' tienen por suma $c'' < c : 4$. Análogamente se construirá otro triángulo en el cual la suma de dos ángulos es menor que $c : 8$ y así siguiendo. A principios del siglo XIX, Legendre desarrolla este razonamiento y, observando que si un triángulo tiene dos ángulos muy pequeños debe aplastarse sobre el lado que une a los vértices de éstos, cree haber encontrado una demostración del teorema de la suma de los ángulos del triángulo. Ahora, es de observar que la forma del razonamiento que hemos esbozado en las líneas anteriores es muy bien conocida por Euclides, que la aplica repetidamente en los Libros X y XII, siendo en este último el instrumento principal, como veremos más adelante. ¿Debemos inferir que

Euclides se dio cuenta de lo engañosa que resulta la actual aplicación en consecuencia de que la longitud del lado que une a los vértices de los dos ángulos pequeños se hace ilimitadamente grande? ¿Que sólo por esta razón despreció el dar a conocer la observación de partida y la sucesiva deducción? Sería atrevido afirmarlo; podría haber también otras razones para que Euclides despreciara este razonamiento; por ejemplo la que implica la aplicación del postulado que nosotros llamamos de Arquímedes o de Eudoxo y que Euclides enuncia sólo al principio del Libro V como definición, posiblemente de ciertas clases de magnitudes (segmentos, áreas, volúmenes). En todo caso, la estructuración del Libro I no puede dejar dudas de que la enunciación del postulado de las paralelas no haya sido precedida por una larga reflexión; y merece notarse que, cuando por fin, para establecer la prop. I, 32, el autor se decide por aceptarlo, cualquier esfuerzo para eludirlo en demostraciones siguientes cesa definitivamente.

Tanto es así que en las proposiciones del Libro XI sobre los triedros, que nosotros sabemos independientes del postulado de las paralelas, Euclides no tiene ningún recelo contra las proposiciones planimétricas que de él dependen directamente.

No queremos dejar de presentar con respecto al método euclídeo una observación de carácter epistemológico que pudo haber influido sobre la forma elegida para el postulado; se trata de la costumbre que tiene Euclides de presentar casi siempre juntas las proposiciones inversas. No es debilidad suya; la tendencia que se nota también ahora a pedir de cualquier hecho matemático las condiciones necesarias y suficientes responde a la misma exigencia. El postulado 5 tiene

respecto de la proposición I, 27 exactamente el oficio de proposición inversa y podemos pensar que esta consideración valiera como justificación para su aceptación, al mismo modo que los modernos empiristas creen conveniente afirmar el origen experimental de los postulados.

Podemos creer que Euclides tuvo la convicción de que la geometría de la intuición humana afirmaba la verdad del postulado; y podemos también considerarlo como una suerte, porque las geometrías que llamamos no-euclidianas contienen en su determinación una constante desconocida, a la que llamamos curvatura del espacio, la cual, si tuviera que ser determinada, no podría serlo sino empíricamente, experimentalmente, y por ende nunca en modo exacto y definitivo. Hay más; las únicas mediciones que nosotros hacemos en efecto independientemente de una teoría física y geométrica son las groseras de la intuición. Apenas para la medición usamos instrumentos, las lecturas que nosotros hacemos por ellos dependen de una teoría; y esta teoría crece en complejidad a medida que crece lo que llamamos la precisión del instrumento. Hay por lo tanto razón para dudar acerca de si el problema de la determinación de la curvatura del espacio pudiera tener un sentido absoluto.

Es importante, por el contrario, tener la seguridad (y no solamente la convicción) de la independencia del postulado euclídeo en el sentido de que al admitirlo o al no admitirlo nunca nos encontraremos en contradicción lógica; de que, por tanto, tenemos bien el derecho de construir nuestra geometría sobre la afirmación de la verdad del postulado (o también sobre la afirmación de la verdad de cualquier postulado no-euclídeo, pero con el inconveniente de caer en inútiles

complicaciones) y de fundar sobre él la teoría de los instrumentos físicos interpretando como fenómenos físicos los resultados no siempre concordantes de la comparación de las afirmaciones lógico-geométricas con los datos de la experiencia. Se dice a menudo que esa seguridad nos viene del hecho de que Riemann, Bolyai y Lobachevsky pudieron construir geometrías que a la par de la de Euclides nunca presentaron contradicciones. Aun para la geometría euclídea tal razón no sería evidentemente suficiente, porque el hecho de que los razonamientos repetidos a lo largo de de 2 ó 3000 años no hayan nunca conducido a contradicciones no garantiza que la contradicción no pueda surgir mañana. A fin de cuentas lo que justifica a los buscadores de lo que los matemáticos declaran imposible es la suposición de que esta imposibilidad no es más que incapacidad.

Las razones lógicas que nos aseguran la imposibilidad de contradicciones son de dos formas: una es la construcción de modelos para los cuales la contradicción quede excluida por la conformidad de ellos con algo que consideramos más profundamente arraigado en nuestras convicciones lógicas que la misma Geometría. Como ese algo se considera generalmente la Aritmética y el instrumento para la construcción del modelo es la geometría analítica. Siguiendo a Descartes, sabemos representar los puntos del plano o del espacio euclídeo por grupos de dos o de tres coordenadas. Las proposiciones geométricas se traducen entonces en relaciones entre números, cuya verdad es consecuencia de las fórmulas algebraicas; sin embargo, no es todavía una razón suficiente para inferir sin más de una demostración algebraica de la no-contradicción, la verdad geométrica de ella, por cuanto al

establecer la representación hemos admitido la verdad de la Geometría. Pero nosotros podemos ahora invertir el razonamiento: definimos sin más, "puntos" aquellos pares o ternas de números; definimos sobre este sistema de puntos las magnitudes geométricas por medio de aquellas fórmulas que las representaban en la hipótesis euclídea o por medio de las otras que las representarían en una cualquiera de las hipótesis no-euclídeas. La validez del Álgebra nos asegura entonces que ninguna de estas geometrías puede en ningún tiempo conducirnos a contradicción.

Tenemos también otro procedimiento que nos permite trabajar mayormente desde el interior de la Geometría misma y posiblemente nos aclara más sus relaciones con el mundo de la intuición física. Admitiendo momentáneamente el postulado euclídeo o admitiendo uno cualquiera de los no-euclídeos (es decir, admitiendo para el espacio una curvatura cualquiera) es posible construir una geometría proyectiva y luego las llamadas métricas cayleyanas, en las cuales el movimiento está representado por las homografías que transforman en sí una determinada variedad de segundo orden. Se sigue entonces que de la admisión de que sea cierta una cualquiera de dichas geometrías, resulta que ninguna de las otras puede presentar contradicciones. Basta, por lo tanto, que nosotros afirmemos que una, no sabemos cuál, de las supuestas geometrías debe realizarse, para concluir que cualquiera de ellas es posible. Esa afirmación, que en términos más técnicos se resume diciendo que el espacio tiene curvatura constante, coincide en fin con la otra de la validez de los tres primeros postulados de los *Elementos*.

III

El Álgebra Geométrica y la Teoría de las Proporciones

Hemos recordado repetidamente el pasaje del *Theetetes* donde parece separarse de la vulgar noción del *segmento-número* (longitud) una noción más profunda de *segmento geométrico*; y el motivo para esta separación resulta del encuentro de dos conocimientos que parecen tener algo discordante: por un lado, el teorema de Pitágoras, que permite construir cuadrados cuyas áreas se expresan por números enteros cualesquiera; por otro lado, el hecho de experiencia, casi intuitivo, de que el área de un rectángulo cuyos lados tengan longitudes expresadas por números enteros se expresa por el producto de estos dos números. El *segmento* de Theetetes deberá reflejar estas propiedades sin caer en los absurdos de las longitudes inexpresables (irracionales).

Euclides, que construye una geometría racional, debe ante todo aclararnos qué es un rectángulo. Ya en el *Menón* al examinar Sócrates, en compañía del esclavo, la noción geométrica del cuadrado, mediante consideraciones intuitivas fundadas principalmente sobre la simetría y la razón suficiente, nos señala el camino de un estudio puramente gráfico de las figuras. La obra de Euclides puede considerarse como una sistematización de aquellas observaciones. Él nos ha conducido a través de las primeras 30 proposiciones del Libro I estudiando racionalmente las propiedades gráficas del

triángulo y llevándonos a nociones precisas sobre las paralelas y la suma de los ángulos de un triángulo, y consiguientemente, cuando era necesario, de un polígono cualquiera. Después de esto, puede ahora construir (prop. I, 33, 34) el paralelogramo y establecer sus propiedades fundamentales sobre la igualdad de los triángulos en que está cortado por una diagonal: la igualdad de los lados y de los ángulos opuestos. Cuando uno de estos ángulos fuera recto, lo serán todos y tendremos el rectángulo. Abandonemos pues nuevamente a Euclides en sus preocupaciones de reunir en el Libro I lo que estima importante para las aplicaciones futuras, y saltemos a inspeccionar un poco las primeras proposiciones del Libro II. Nos encontramos a tratar precisamente con rectángulos de los cuales sólo interesan aquellas sencillísimas propiedades de forma, además de una noción casi-segmentaria por la cual se puede obrar con ellos a partir de los conceptos de suma y resta que aparecen en las *nociones comunes* (prop. II, 1): *la suma de rectángulos con un lado común es un rectángulo que tiene todavía ese mismo lado y otro lado que es la suma de los otros lados de los rectángulos dados*; (prop. II, 2 y 3): son casos particulares de la precedente, en los que algunos de los rectángulos son precisamente cuadrados. En las proposiciones siguientes, aunque en forma todavía muy simple, se necesita alguna noción geométrica más sobre nuestras figuras, y entendemos, por tanto, que Euclides quisiera entretenernos sobre ellas en el Libro I. Entretanto hemos adquirido la idea de poder tratar con las figuras poligonales planas como magnitudes, es decir "cosas" en el sentido de las *nociones comunes* y hemos aprendido que, con respecto a los segmentos, que constituyen los lados, los rectángulos gozan de ciertas propiedades análogas

las del producto respecto de los factores (la distributiva respecto de la suma y la conmutativa, que resulta de la igualdad del rectángulo consigo mismo cuando se cambian los lados), que se averiguan por la observación directa aun más prontamente que por medio de la eventual representación numérica.

La idea de considerar las áreas poligonales como "cosas" según las nociones comunes ya estaba, por otra parte, en las proposiciones del Libro I que momentáneamente habíamos abandonado; ella nos introduce en la noción de *equivalencia*; Euclides no usa el término, ni otro equivalente, hablando únicamente de *igualdad*, pues de cosas iguales hablan efectivamente las nociones comunes. Nada dice, por otra parte, que a esta noción Euclides le atribuyera un significado de *cantidad*, o la considerara como una idea primitiva aparte de definirse axiomáticamente; lo que interesa, por el momento, es que, partiendo de la noción de igualdad geométrica adquirida con los teoremas anteriores a I, 27, la misma se extiende por la aplicación de las nociones comunes 1, 2, 3.

La prop. I, 35 establece, dentro de este marco, que dos paralelogramos con la misma base y comprendidos entre el

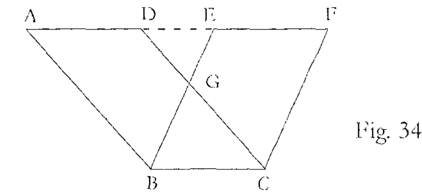


Fig. 34

mismo par de paralelas son iguales. La demostración, en resumen, es la siguiente:

Siendo ABCD, EBCF los dos paralelogramos, supóngase que los lados BE, DC se corten en el punto G; obsérvese

que los dos triángulos ABE y DCF son iguales. Del primero se obtiene el paralelogramo ABCD restando el triángulo DGE y añadiendo el triángulo BGC. Con las mismas operaciones se obtiene el paralelogramo EBCF partiendo del triángulo DBCF. Luego etc.

La posición relativa adoptada para los dos paralelogramos considerados no es la única posible, por cuanto podrían los lados DC y BE no cortarse, como lo muestra la figura 35. Ya Proclo hace esta observación y explica que Euclides tuvo que fijarse en la primera hipótesis como la más complicada, mientras que la demostración se repite para este otro caso con sólo no hablar de restar, y añadir simplemente a los triángulos ABE, DCF el trapecio EBCD. Así debe ser

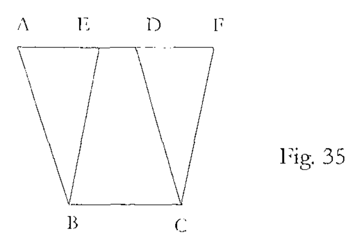


Fig. 35

ciertamente; pero no podemos dejar de manifestar un poco de extrañeza al notar que Euclides habría podido elegir en cambio la demostración siguiente que no admite distinción de casos: Los paralelogramos ABCD, EBCF se obtienen del único trapecio ABCF restando una vez el triángulo DCF y otra el triángulo igual ABE.

En las proposiciones I, 36 hasta I, 42 se deducen, según un orden de sucesión que se ha mantenido más o menos inalterado hasta los libros elementales modernos, los principales teoremas sobre la equivalencia de paralelogramos y trián-

gulos. Aunque algunos detalles en las demostraciones deban atraer nuestra atención más tarde, no vamos a detenernos en ellos, para llegar en seguida a la prop. I, 43, el *teorema del gnomon*, cuya demostración se presenta del todo independiente de los teoremas anteriores: *si por un punto de una diagonal de un paralelogramo se trazan las paralelas a los lados, ellas determinan de las dos partes de la diagonal dos paralelogramos equivalentes.* En efecto, la diagonal AC (ver fig. 36) divide en dos triángulos iguales cada uno de los paralelogramos ABCD, AEKH, KGCF; se tiene

EBGK = ABC - AEK - KGC
HKFD = ADC - AHK - KFC

luego EBGK = HKFD.

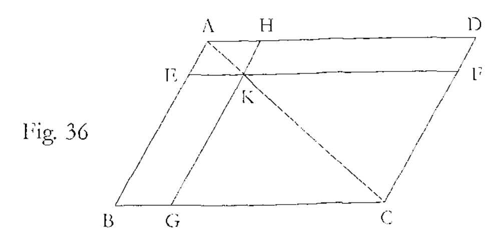


Fig. 36

Euclides dice que los paralelogramos EBGK y HKFD se encuentran *en posición complementaria.*

Inmediatamente (prop. I, 44), Euclides aplica esta proposición para *construir un paralelogramo que tenga un ángulo y un lado asignados y sea equivalente a un triángulo dado.* En aplicación de las proposiciones anteriores, Euclides sabe construir un paralelogramo equivalente a un triángulo dado y con un ángulo dado, que él elige igual al que supone asignado, de manera que, en verdad, el problema es construir un paralelogramo con un lado y un ángulo asignado equivalente a otro que ya tiene el

ángulo propuesto; sea este paralelogramo ABCD (ver fig. 37), sobre la prolongación de CD pongamos un segmento CE

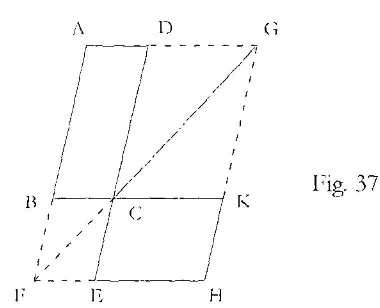


Fig. 37

igual al segmento dado y completemos el paralelogramo BCEF; tracemos la diagonal CF hasta encontrar la recta AD en G y completemos el paralelogramo AFHG; prolongando luego BC hasta encontrar GH en K, CEHK será la solución del problema.

Supongamos que el ángulo dado fuera recto, y que el segmento dado CE sea, en una terminología que nos es habitual, el segmento unidad (de longitud 1); CEHK nos dará, con su base EH la medida, el área del triángulo propuesto. Desde luego Euclides usa otro idioma, y para él no constituye sólo un idioma sino que es más bien un programa. Pero el lector ve cuánto camino se ha recorrido con esta simple proposición; ¡descomponiendo en triángulos cualquier figura poligonal y usando la prop. II, 1, las operaciones de las *nociones comunes* sobre áreas están reducidas a las mismas sobre segmentos sin que haya necesidad de pasar por representaciones numéricas!

El Libro I cierra con las prop. I, 47, 48, el teorema de Pitágoras y su inverso, demasiado conocidos, con su demostración euclideana.

Antes de proseguir queremos volver un momento atrás a considerar algunos particulares que a propósito hemos dejado de lado. Hemos dicho que Euclides deriva la noción de la equivalencia directamente de la sobreposición de las *nociones comunes* a una primitiva idea de identidad geométrica; precisamente partiendo de esta primitiva igualdad enunciada en la noción 4, el concepto de igualdad (equivalencia) va amplián-

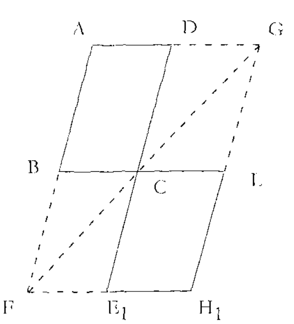


Fig. 38

dose gradualmente por la repetida aplicación de las nociones 1, 2, 3; y todo lo que dijimos se entiende completamente sin pedir más. Sin embargo, si miramos nuevamente la última construcción (ver fig. 38), notamos que, para construir el paralelogramo requerido, se habría podido llevar el segmento CE sobre la prolongación de BC en lugar de la prolongación de CD. ¿Habríase obtenido el mismo paralelogramo? La pregunta habría podido aun hacerse antes, porque cuando Euclides supone que el triángulo dado fue previamente transformado en el paralelogramo ABCD, sabe perfectamente que esta transformación no está unívocamente determinada; pero él no se ha olvidado de darnos por anticipado la contestación afirmativa con las prop. 39, 40, que afirman que triángulos equivalentes con igual base

tienen igual altura. Evidentemente, los triángulos equivalentes de la hipótesis deben haberse reconocido tales de alguna manera y ésta no puede ser otra que el hecho de habérselos construido por la repetida aplicación de las nociones 1 a 4. Para demostrar dichas proposiciones, el autor se refiere a la noción 5, "el todo es mayor que la parte": si una figura es toda interior a otra no puede serle equivalente. Ahora, mientras las primeras nociones eran puramente constructivas, la nueva afirmación es verdaderamente un postulado, que en el siglo pasado fue conocido con el nombre de *De Zolt*. Volveremos más adelante sobre esta consideración: admitida la validez de las prop. 39, 40, la representación segmentaria de las áreas a la cual aludimos antes queda unívocamente determinada.

La definición euclídea de la equivalencia admite la composición de las figuras poligonales por suma y diferencia; en los libros modernos se da a menudo importancia –considerándolo como un progreso lógico– al requerimiento de que las figuras que se declaran equivalentes se compongan por suma de partes iguales y se atribuye a J. Duhamel el haberlo afirmado primero en su libro *De la méthode dans les sciences du raisonnement*, aunque anteriormente había sido planteado, al menos como problema, por W. Bolyai y por Gerwien. Un ejemplo

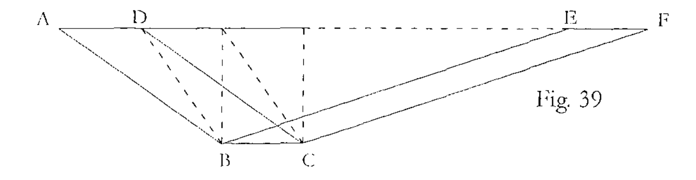


Fig. 39

muy conocido, por encontrarse en muchos libros elementales, de realización de tal requisito, se tiene en la siguiente demostra-

ción de la prop. I, 35: Para demostrar la equivalencia de los dos paralelogramos ABCD, EBCF (ver fig. 39), transportemos sobre la recta ADEF a partir de AD, hacia EF segmentos sucesivos iguales a AD = EF hasta alcanzar este segundo segmento; construyendo los paralelogramos que tienen la base común BC y como base opuesta, cada uno, uno de estos sucesivos segmentos, se obtiene una cadena tal que dos paralelogramos sucesivos se encuentran siempre en la posición relativa del segundo caso notado hablando de la demostración de Euclides, cuando esta demostración lleva a afirmar la equivalencia por suma, sin resta. Nótese además que si una figura A puede descomponerse en partes tales que, reunidas en otro orden forman otra figura B y esta figura B a su vez puede descomponerse en partes que análogamente forman otra figura C, es posible determinar una descomposición de A en partes tales que, en orden conveniente, sirvan para formar C. (En efecto, basta sobreponer las dos descomposiciones de B para obtener las partes de la nueva.) Se infiere entonces por inducción que existe una descomposición del paralelogramo ABCD en partes que en un orden conveniente formarán el paralelogramo EBCF. (Si el número de los paralelogramos que se han tenido que insertar entre los dos datos es n, se ve en seguida que el número de partes de esta última descomposición será menor o igual a 2^{n+1}.) Se observa igualmente en los libros que para que esta demostración sea completa es necesario afirmar que, efectivamente, transportando a partir de AD un segmento igual un número de veces bastante grande, se alcanzara el segmento EF, y que de esta afirmación no tenemos demostración, sino que se la debe admitir como un postulado, al cual se lo llama de Eudoxo o de Arquímedes.

Creemos que nadie puede negar un interés a esta nueva demostración; pero ¿cuál es el interés en ello? Cuando, para alcanzar determinado resultado tenemos a disposición determinados medios, el problema de ver si acaso ellos no son superabundantes, y si tenemos habilidad para obrar con medios reducidos, tiene un múltiple interés no solamente de gimnasia mental, sino también como análisis más hondo del problema y de los elementos que tenemos a nuestra disposición. En el caso presente, la solución encarada nos ha llevado a alguna consideración de género nuevo y en particular a considerar un nuevo postulado geométrico que se presentará aun en otras ocasiones. Ella nos permite también plantearnos otros problemas; tal sería por ejemplo saber si las 2^{n+1} partes en que encontramos necesario descomponer nuestros paralelogramos constituyen verdaderamente un número mínimo; y la respuesta sería aquí negativa, pues es fácil ver que, si se divide la faja entre las paralelas BC, AF en fajas parciales de

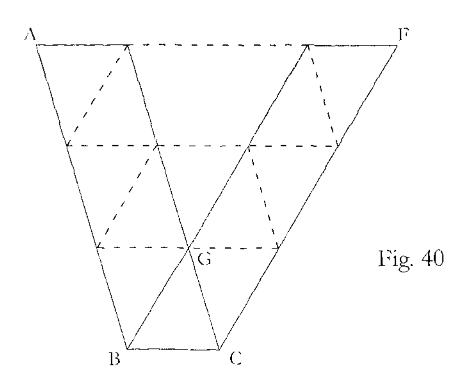


Fig. 40

altura igual (o menor) a la distancia de O a la BC, el número de éstas es el mismo $n + 1$ de antes; cada una de estas fajas deter

mina, en los dos paralelogramos, pares de paralelogramos menores que, siempre aplicando el método de Euclides, se transforman uno en otro por descomposición en 2 partes; de esta manera, los dos paralelogramos se componen con partes iguales dos a dos en número de $2(n + 1)$ ($< 2^{n+1}$ para $n > 1$).

Con todo, no es éste el problema lógico que verdaderamente debemos proponernos al comparar la demostración euclídea con la de Duhamel. Ello reside, por el contrario, en la condición que se nos presentó para poder llevar a conclusión el nuevo razonamiento, expresada por el postulado de Arquímedes. ¿Es ella necesaria? *Si no es necesaria, tendremos un teorema* que afirmará que si dos polígonos son equivalentes respecto de las operaciones de suma y resta, lo son igualmente respecto de la sola operación de suma; está entonces justificado que Euclides elija en cada caso las operaciones que le parezcan más convenientes y únicamente podría pedírsele la explícita afirmación del teorema. *Si es necesaria*, entonces ya la equivalencia por suma no es la misma cosa que la de Euclides, salvo en el caso de que hubiera equivalencia entre el llamado postulado de *De Zolt* y el postulado de Arquímedes. Más adelante mostraremos que a esta última alternativa se contesta con la negativa. Vamos a demostrar en seguida que *en el caso de afirmar la invalidez del postulado de Arquímedes existen polígonos equivalentes respecto de la operación de restar que no lo son respecto de la operación de sumar.*

Tomemos, en efecto, nuevamente nuestros paralelogramos ABCD, EBCF comprendidos entre las paralelas AF, BC (ver fig. 39) y por lo tanto equivalentes según Euclides. Supondremos, para simplificar la exposición, que AB = AD; se ve entonces enseguida que el segmento que une a dos puntos cualesquiera de ABCD *es siempre* menor que 2AD.

Supongamos ahora, en negación del postulado de Arquímedes, que, para cualquier valor entero, n sea DE > nAD, se tiene *igualmente* BE > AE - AB = AE - AD = DE > nAD.

Pensemos, por el absurdo, que el paralelogramo EBCF pudiera componerse por suma de cierto número m de polígonos que, dispuesto, en otro modo, formaran ABCD; el lado EB deberá ser suma de ciertos lados de estos polígonos. Pero, por cuanto cada uno de estos polígonos debe poderse poner dentro de ABCD, cada uno de estos lados será menor que 2AD. Se sigue que BE < 2mAD, contrariamente a la conclusión anterior.

Inferimos pues que, pueda o no pueda atribuirse a Euclides un fino análisis del cual no tenemos en verdad trazas evidentes, la forma elegida por Euclides en la definición de la equivalencia y la verdadera preferencia que, con la sola excepción de I, 35, se nota en las proposiciones siguientes por razonar por diferencia, en lugar de representar una deficiencia en comparación de los desarrollos modernos, encuentra en el programa de una fundación lógica de la Geometría su perfecta explicación.

El Libro II de los elementos, muy corto en verdad, pues no contiene más de 14 proposiciones contra las 48 del Libro I, puede bien considerarse como un pequeño tratado de álgebra de segundo grado referido a operaciones con segmentos, tratado cuyo fundamento son las últimas proposiciones del Libro I constituyen el fundamento. En verdad, si se hace abstracción de la proposición II, 1, de la cual ya hablamos y de II, 2, 3, que son casos particulares de ella, por demás insignificantes, se reduce a dar vuelta en varios sentidos el teorema del gnomon, aplicado al caso en que el paralelogramo sea un cuadrado (lo

que algebraicamente significa la fórmula $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$) y a la aplicación –en modo esencial, una sola vez, en la

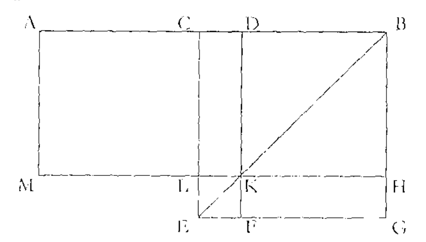


Fig. 41

prop. II, 14– del teorema de Pitágoras. Para lo que vamos a decir a continuación, nos conviene considerar las prop. II, 5, 6, cuya analogía el lector ve enseguida por las figuras: dice II, 5 (ver fig. 41) que si el segmento AB está dividido en partes iguales en C y en partes desiguales en D el rectángulo ADKM más

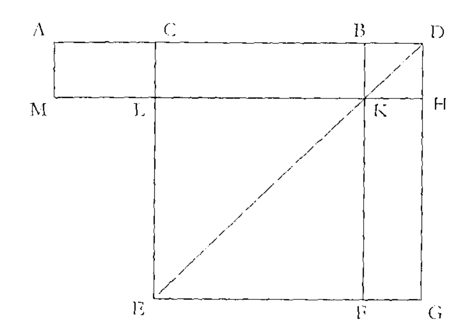


Fig. 42

el cuadrado LKFE es igual a CBHL + KHGF + LKFE = CBGE. Y dice II, 6 (ver fig. 42) que el rectángulo ADHM más el cuadrado LKFE iguala al cuadrado CDGE. Estas dos proposiciones se aplican en III, 35, 36 (en el orden mismo de su presentación) para demostrar los dos teoremas sobre la potencia de un punto respecto de una circunferencia (según el punto

sea interior o exterior a la misma): en las figuras hemos reproducido las correspondientes de Euclides, con la sola diferencia

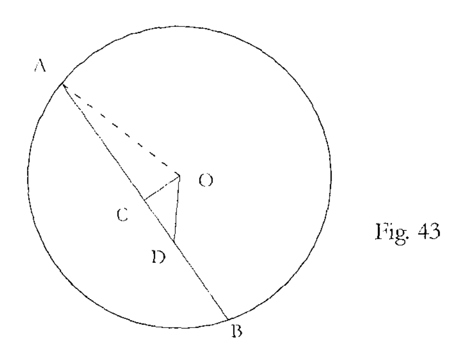


Fig. 43

de conservar las letras que ocupan lugares análogos en las figuras anteriores y de suprimir algunas líneas superfluas; resulta, aplicando los teoremas II, 5 y II, 6:

para el punto D interno a la circunferencia (ver fig. 43):

rect. DA . DB + cuadr. CD = cuadr. AC

para el punto D externo:

rect. DA . DB + cuadr. AC = cuadr. CD

Añadiendo en todos los casos el cuadrado de OC y aplicando el teorema de Pitágoras resulta respectivamente:

rect. DA . DB + cuadr. OD = cuadr. OA
rect. DA . DB + cuadr. OA = cuadr. OD

lo que demuestra que en todos los casos el área del rectángulo de DA y DB depende únicamente del radio del círculo y de la distancia de D al centro, siendo independiente de la transversal considerada.

Para el caso del punto D externo (ver fig. 44), Euclides completa su deducción demostrando, siempre por el teorema

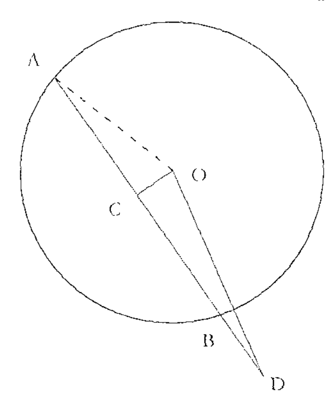


Fig. 44

de Pitágoras, que la diferencia de los cuadrados de OD y de OA es el cuadrado de la tangente trazada de D a la circunferencia. Habría podido observar que análogamente en el otro caso la diferencia entre los cuadrados de OA y OD es el cuadrado de la mitad de la cuerda por D perpendicular a OD;

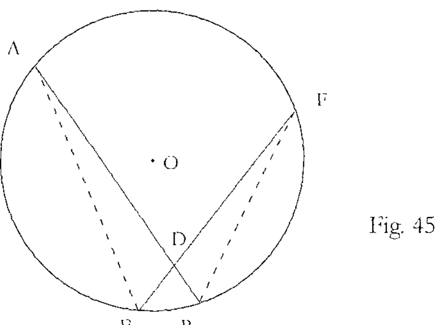


Fig. 45

evidentemente no lo hace porque lo considera incluido en el

enunciado, siendo esta cuerda una de las muchas; y evitar repetir casos particulares le es habitual.

En la prop. III, 37, última del Libro, Euclides invierte la III, 36 en lo que se refiere a la longitud de la tangente; por el contrario, notamos con maravilla que desprecia otra inversión mucho más importante. En el dibujo de Euclides la primera figura (ver fig. 45) que hemos trazado arriba en forma simplificada contiene dos transversales por el punto D, con el fin de enunciar que los rectángulos de los segmentos determinados por D sobre las dos cuerdas son iguales (equivalentes). Ahora bien, si el autor hubiera completado la figura trazando las rectas AE, BF, habría obtenido la misma que él había dibujado para la prop. III, 21, que afirma que *ángulos inscriptos en el mismo arco son iguales*; esto es:

$$\angle EAD = \angle DFB \ , \ \angle AED = \angle FBD.$$

Y aun cuando Euclides no hubiera pensado enseguida en trazar esas rectas, estaban en su figura cuatro puntos sobre una circunferencia y debe extrañarnos que no haya pensado en invertir la proposición diciendo: *si dos segmentos se cortan en un punto que divide a los dos en partes que forman rectángulos equivalentes, los extremos de esos segmentos están sobre una circunferencia*. Y esta inversa recordaba a su vez la III, 23, proposición inversa de III, 21, la cual afirmaba que *ángulos iguales sobre el mismo segmento tienen sus vértices sobre un mismo arco de círculo que pasa por los extremos del segmento*. Evidentemente, al escribir el Libro III, el autor de los *Elementos* está un poco apresurado; y podemos intentar adivinar las razones en estos dos hechos:

Primero, el Libro IV nos ofrece una especie de conclusión, un punto de llegada y de descanso, como lo será al final

de la obra el Libro XIII. Como en éste se trata de inscribir y circunscribir a la esfera los poliedros regulares (platónicos), así en el Libro IV se trata el análogo y más simple problema planimétrico, relativo a la construcción de polígonos regulares, aplicación y resumen de las teorías precedentes, y preparación para aquél.

Segundo, el Libro V nos presenta un súbito cambio de ruta, desvinculándose casi por completo de las ideas directoras de los Libros anteriores; los elementos con los que se trata ya no son más segmentos, ángulos y polígonos, sino magnitudes en general; y el hecho de que la figuración que acompaña las demostraciones se hace todavía exclusivamente por segmentos, mientras que los comentaristas se esfuerzan frecuentemente en acentuar el nuevo punto de vista con el dibujo de objetos diferentes [1], sólo demostrará con mayor claridad el pensamiento más puramente abstracto del autor antiguo, desvinculado de la representación material; pues esos segmentos no tienen diferente significación que las letras en nuestras demostraciones algebraicas. Podemos aceptar la tradición que indica a Eudoxo como el autor que habría señalado el nuevo camino; pero volveremos a eso un poco más adelante.

Vale la pena, por el contrario, que intentemos seguir todavía por un breve trecho la huella que Euclides está abandonando, porque podremos ver que por medio de las consideraciones últimamente señaladas, las cuales por el estrecho parentesco con las propias proposiciones euclídeas, no podían ciertamente serle desconocidas, él ya se hallaba en la total

[1] Véase, por ej., el *Euclides restitutus* de Borelli.

posesión de una teoría de la proporcionalidad entre segmentos y de la semejanza geométrica que, por todo lo que se aparenta, constituye el fin último del Libro VI; y esto con deducciones más rápidas y, si se tienen únicamente en vista los fines inmediatos, con ventajas metodológicas no indiferentes.

Como orientación, notemos que las proposiciones fundamentales de las que depende todo el uso de las nociones de proporcionalidad y de semejanza se reducen a las siguientes:

Llamando a, b, c, ... segmentos, y utilizando la ordinaria representación de las razones e igualdad de razones (proporción),

a) $a : b = c : d$ equivale a rect. ad = rect. bc.
b) si $a : b = c : d$ y $c : d = e : f$, entonces $a : b = e : f$.
c) Las propiedades relacionadas a transposición de términos en una proporción.
d) Las proposiciones sobre las operaciones de componer y dividir[2].
e) Triángulos equiángulos tienen lados respectivamente proporcionales y recíprocamente.
f) El llamado teorema de Thales.
g) El teorema de la razón perturbada: si $a : b = c : d$ y $e : b = c : f$ será $a : e = f : d$.

[2] El sentido técnico en la teoría de las proporciones de los vocablos *componer* y *dividir* al cual nos referimos aquí ya proviene de Euclides (Libro V, Def. 15 y 16): "La composición de las razones consiste en formar la razón de la suma del antecedente y del consecuente al consecuente". "La división de las razones consiste en formar la razón del exceso del antecedente sobre el consecuente al mismo consecuente."

Podemos elegir *a)* por definición; *c)*, *d)*, *g)* resultan entonces en seguida de II, 1, y de la conmutabilidad de los lados de un rectángulo.

Dados dos triángulos equiángulos, disponiéndolos con un par de ángulos correspondientes opuestos en el vértice de modo que lados correspondientes queden sobre rectas diferentes, se forma la figura de III, 35 y III, 21; por el teorema inverso de III, 21 (III, 23) y III, 35 se infiere que en los dos triángulos los lados correspondientes forman proporción (prop. *e)* directa).

Dados dos triángulos con lados proporcionales, formando un nuevo triángulo con un lado igual respecto de uno de los triángulos dados y con los ángulos iguales a los homólogos del otro triángulo, el nuevo triángulo tendrá sus lados proporcionales a los del segundo triángulo y uno igual al homólogo primero; luego todos sus lados serán iguales a los homólogos de este triángulo y los dos triángulos coincidirán. Resulta así demostrada la *e)* inversa.

Dados dos triángulos equiángulos, disponiéndolos con un par de ángulos correspondientes sobrepuestos u opuestos y los lados homólogos que forman estos ángulos sobre la misma recta, los terceros lados resultan paralelos. Teniendo en cuenta las conclusiones precedentes resulta *f)* directa e inversa.

Poniendo *a*, *c*, *e* sobre un lado de un ángulo cualquiera y *b*, *d*, *f* sobre el otro en modo de aplicar *f)* se obtiene *b)*.

Si reflexionamos sobre las hipótesis que han permitido esta deducción, notamos que además de los postulados fundamentales, se ha tenido que admitir la teoría de la equivalencia según Euclides, y por tanto la aplicación a las áreas

poligonales de las nociones comunes; precisamente, en cuanto a hipótesis se refiere, la aplicabilidad de la noción 5 para demostrar I, 39, 40. Ahora bien, debe notarse que, aun cuando, según resulta del texto que está en nuestras manos, Euclides no ha ido por este camino, él no tuvo ningún reparo con respecto a este particular, pues estas mismas hipótesis están aplicadas plenamente en la prop. VI, 2: *Si en un triángulo se traza la paralela a un lado, los otros lados quedan cortados en partes proporcionales* (la proporcionalidad entendiéndose aquí en el sentido del Libro V); *y si los lados de un triángulo están cortados proporcionalmente, la recta que une los puntos de división es paralela al tercer lado.*

En efecto –dice Euclides– si DE es paralela a BC, los triángulos BDE y CDE son equivalentes por tener la misma base DE y los vértices B y C sobre la misma paralela a la base; pero $\Delta BDE : \Delta ADE = BD : AD$; $\Delta CED : \Delta AED = CE : AE$; luego

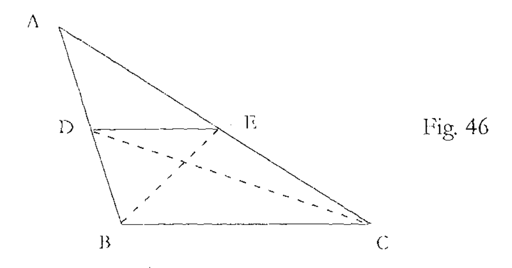


Fig. 46

$BD : AD = CE : AE$. Sean ahora los lados AB, AC cortados proporcionalmente en D y E; podrán escribirse las mismas proporciones en orden invertido; resultará luego $\Delta BDE = \Delta CDE$; y siendo estos triángulos iguales con la misma base, sus vértices estarán sobre la misma paralela a esa base por I, 39.

Vamos a mostrar que aún podemos evitar ese escollo de la noción 5 modificando apenas el procedimiento indicado, por un sendero no por nada arduo, pero que, según debemos creer, estaba fuera del orden de pensamientos de Euclides. Falta a Euclides el concepto de que una propiedad geométrica general del espacio pueda estar condicionada por su realización en un único caso particular. Nosotros sabemos, por ejemplo, que, admitidos los postulados 1, 2, 3, y construida luego la teoría euclidiana hasta la prop. I, 28, el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo y luego la I, 29 podrá demostrarse si, en lugar del postulado 5, suponemos solamente que en un único triángulo, cualquiera que sea, la suma de los ángulos es dos ángulos rectos. Euclides se orienta por el contrario hacia un enunciado general.

Del mismo modo, notamos, algunas páginas atrás, que el teorema del gnomon (I, 43) y sus aplicaciones I, 44, 45 habrían podido limitarse, en relación con lo que sigue, al caso de rectángulos; y sabemos también que con esta limitación, y probablemente aun limitado más estrechamente al cuadrado, era conocido por los geómetras primitivos. Pero Euclides se pone sin más en las condiciones que el ángulo del paralelogramo sea cualquiera, sin ninguna mejor razón que la de eliminar restricciones aparentemente inútiles.

Vamos nosotros a ubicarnos en el principio opuesto mostrando cómo, limitándonos desde un principio –para poner las definiciones– a un caso convenientemente particular, vamos a alcanzar resultados conceptualmente importantes.

Tomaremos nuevamente como definición la propiedad *a*), con la restricción de que la relación rect. *ad* = rect. *bc* deba interpretarse en el sentido de que los dos rectángulos *ad*, *bc*

pueden ponerse en la disposición de los rectángulos complementarios de un gnomon dentro de un rectángulo de lados $a + b$ y $c + d$; por lo tanto, por el momento tampoco sabemos nada de una posible equivalencia entre las relaciones rect. a*d* = rect. *bc* y rect. *ad* = rect. *cb*.

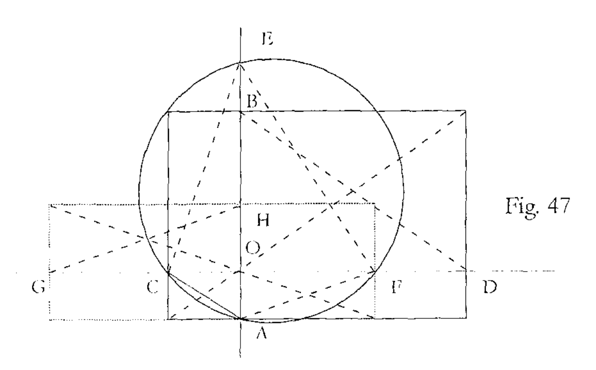


Fig. 47

Observando que en todo rectángulo las dos diagonales son igualmente inclinadas sobre cada lado, se ve enseguida que *a)* significa así que en dos triángulos rectángulos equiángulos AOC, BOD son lados homólogos *a* y *b*, *c* y *d*.

Dejando fijo uno de estos triángulos, por ejemplo AOC, permutemos en el otro los dos lados; resulta entonces que los triángulos equiángulos AOC, FOE se encuentran en la posición relativa de la figura de III, 21; luego por III, 23 los cuatro puntos AFEC están sobre una circunferencia y son todavía equiángulos los triángulos COE, AOF.

Si entonces permutamos ahora los lados del triángulo COE, resulta que se encuentran nuevamente los rectángulos de *a*, *d* y de *b*, *c* en la posición complementaria respecto de un gnomon dentro de un rectángulo de lados $a + c$ y $b + d$.

Concluimos que la relación rect. *ad* = rect. *bc*, con la definición restringida establecida en las líneas anteriores, equivale a rect. *ad* = rect. *cb*, y luego también a rect. *da* = rect. *bc* = rect. *cb*; esto es, hemos obtenido la permutabilidad de los lados del rectángulo respecto de nuestra definición restringida que considera el rectángulo como posición y no como área.

Al mismo tiempo hemos demostrado la transponibilidad de los términos en una proporción [prop. *c)*].

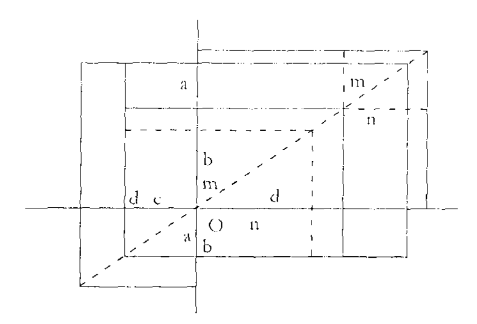


Fig. 48

La simple observación de la figura del gnomon (ver fig. 48) con una transformación por simetría respecto del punto *O* demuestra enseguida las propiedades *b)* y *d)*.

Quedan únicamente las propiedades *e)* y *f)*.

Sean ABC y DEF dos triángulos equiángulos, con $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle F$ (ver figs. 49 y 50). Si trazamos las alturas BG, EH resultan los triángulos rectángulos ABG equiángulo con DEH, CBG equiángulo con FEH; luego

$$AG : DH = BG : EH \ ,$$
$$CG : FH = BG : EH \ ,$$

y componiendo o dividiendo (según sean las alturas internas o externas a los triángulos):

$$AC : DF = BG : EH.$$

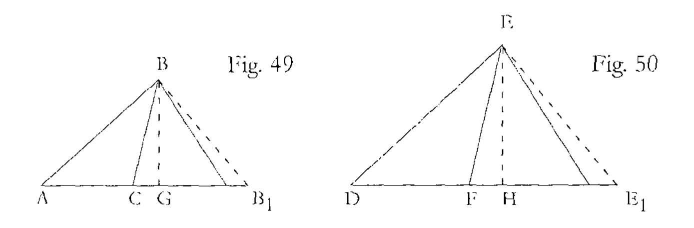


Fig. 49 Fig. 50

Es decir que en triángulos equiángulos lados homólogos son proporcionales a las alturas correspondientes.

Llevamos ahora sobre las rectas AC, DF respectivamente los segmentos $AB_1 = AB$, $DE_1 = DE$; los triángulos ABB_1, DEE_1, isósceles con ángulos iguales en el vértice, serán todavía equiángulos y nos dan en consecuencia $AB_1 : DE_1 = BG : EH$ y luego, por la proporción anterior, $AC : DF = AB_1 : DE_1 = AB : DE$. Es decir, *en triángulos equiángulos los pares de lados homólogos son proporcionales* [prop. *e)*].

Enseguida se tienen las proposiciones inversas: *si dos triángulos tienen los lados proporcionales son equiángulos* y *si dos triángulos tienen un ángulo igual a un ángulo y los lados que los forman proporcionales son equiángulos*, bastando en cada caso combinar los criterios de igualdad de triángulos con la consideración de un triángulo auxiliar que tenga los lados proporcionales a los de uno de los triángulos dados y uno de ellos igual al lado homólogo del otro triángulo. El segundo de estos teoremas es el de Thales [*f)*].

Podemos finalmente demostrar *g)*. Téngase en efecto los 6 segmentos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, tales que, por hipótesis, $a : b = c : d$, $e : b = c : f$; podrán siempre suponerse ordenados de manera que $a < e < b$ [3] (en el caso de que una de estas desigualdades se cambiara en igualdad la proposición no tendría error en la demostración). Tracemos por un punto O dos rectas sobre las

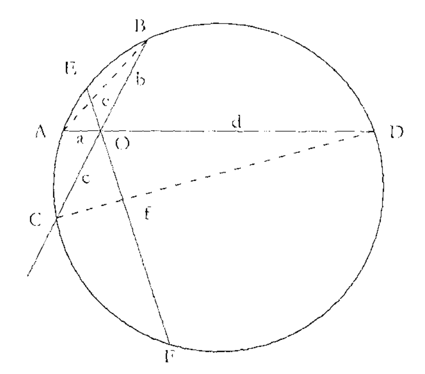


Fig. 51

cuales llevamos los segmentos OA = *a*, OB = *b* y en dirección opuesta respectivamente OD = *d*, OC = *c*. Por la primera proporción y por ser ∠AOB = ∠DOC, los triángulos AOB y DOC

3 Basta notar que si las proporciones de la hipótesis se realizan para un orden determinado de los segmentos, siguen realizándose si se cambian entre sí los segmentos de alguno (aun todos) de los pares (*a*,*d*), (*b*,*c*), (*e*, *f*); a raíz de esas proporciones se pueden luego suponer atribuidas las letras a los segmentos de manera que se realice uno de los pares de desigualdades ($a < b$, $d < c$), ($a < b$, $a < c$) y uno de los pares ($e < b$, $f < c$), ($e < b$, $e < c$); será entonces siempre $a < b$, $e < b$. Si además, resulta $a < e$, será realizada sin más la condición del texto; si así no fuera, bastará con cambiar todavía entre sí las letras *a*, *e* y también *d*, *f*.

son equiángulos con ∠ABO = ∠ABC = ∠ODC = ∠ADC; resulta, por III, 23, que los puntos A, B ,C ,D están sobre una circunferencia. Sobre el arco AB de ésta por III, 7, habrá un punto E tal que O, E = *e*. Sobre la prolongación de O, E llevamos O, F = *f*; el mismo razonamiento anterior aplicado a la segunda proporción nos dará que B, C, E, F están sobre una circunferencia; y pues B, C, E ya pertenecen a la anterior, serán las dos circunferencias coincidentes. Pero resulta entonces que A, D, E, F están sobre una circunferencia y por III, 21 los triángulos AOE, FOD, son equiángulos; de donde finalmente sigue $a : e = f : d$.

Reconstruida así la teoría de las proporciones sobre la base de una teoría de equivalencia-reducida, vamos a ver cómo podemos llegar a la equivalencia verdadera de los polígonos, sin más que referirnos a las nociones comunes.

Notaremos primero que, dado un triángulo A, B, C, si de A y de B se trazan las alturas AA', BB', resultan los triángulos AA'C, BB'C equiángulos; poniendo AC = b, BC = a, AA' = h_a, BB' = h_b, resulta $a : b = h_b : h_a$. Si entonces, fijado de una vez

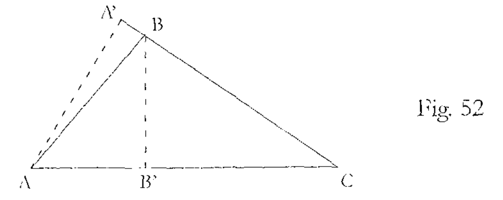


Fig. 52

y para siempre un segmento u, llamamos t al segmento definido por $u : a = h_a : t$, será por *g)*, también $u : b = h_b : t$; es decir que *la proporción* $u : a = h_a : t$ *define, con respecto a cada triángulo, un segmento t que es el mismo cualquiera sea el par, lado y altura correspondiente, que se elige para hacer la construcción.*

Se ve bien que este segmento t viene a representar algo como el área del triángulo; vamos en efecto a demostrar que si un triángulo se divide de una manera cualquiera en partes triangulares, el segmento que corresponde al triángulo total es igual a la suma de los segmentos correspondientes a las partes. Dividimos la demostración en dos partes:

1° Supongamos que el triángulo ABC sea dividido en partes triangulares por un sistema de rectas que salen del vértice A; serán todos triángulos de la misma altura h y cuyas bases a_1, a_2, ... tienen por suma la base a del triángulo total; a cada

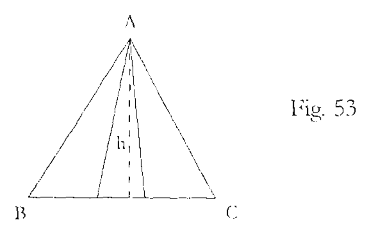


Fig. 53

triángulo parcial corresponde un segmento t_i definido por $u : a_i = h : t_i$; se sigue $u : (a_1 + a_2 + ...) = h : (t_1 + t_2 + ...)$ pero $a_1 + a_2 + ... = a$, y $u : a = h : t$; luego $t_1 + t_2 + ... = t$.

2° Supongamos ahora el triángulo ABC dividido de una manera cualquiera en partes triangulares. Por un vértice A tracemos todas las transversales por los vértices de estos

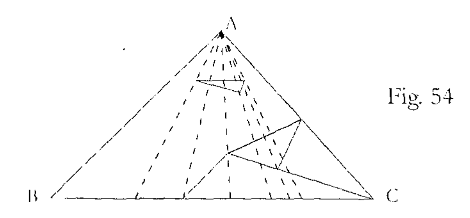


Fig. 54

triángulos parciales; resultarán de esta manera subdivididos, tanto el triángulo ABC como sus partes de la primera división, en partes en la forma particular 1°; y cada una de estas partes se presentará compuesta por triángulos y cuadrángulos sin vértices internos a ella como en la figura adjunta. Puede todavía esta descomposición reducirse a ser compuesta únicamente por triángulos, con trazar en cada cuadrángulo una diagonal arbitrariamente. Resulta entonces claro, que, analizando[4] cada uno de estos sectores triangulares a partir del lado opuesto al vértice del sector, viene a expresarse ese sector como suma de triángulos, en las condiciones 1°, de los cuales uno solamente puede todavía presentarse dividido en partes por los segmentos trazados; a este triángulo, que tiene las mismas características del sector de origen, se aplica la misma reducción y así continuando. Basta entonces aplicar repetidamente el resultado de 1°, concluyendo que tanto el segmento *t* determinado con respecto al triángulo de partida

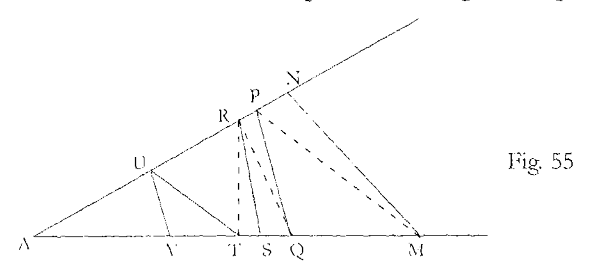


Fig. 55

---

[4] Por la claridad he aquí un ejemplo de tal análisis en el sector AMN (ver fig. 55):
AMN = NMP + PMA; PMA = PMQ + PQA;
PQA = PQR + RQA; RQA = RQS + SRT + TRA;
TRA = RTU + UTA; UTA = TUV + VUA.

ABC como los análogos segmentos correspondientes a los triángulos de la subdivisión dada, se componen respectivamente como suma total y sumas parciales de los segmentos análogos correspondientes a los triángulos de la última subdivisión; *t* es por lo tanto también la suma de estas sumas parciales. Resulta así demostrado lo afirmado.

Como paso final, dado un polígono cualquiera, se ve, con el mismo razonamiento, que si se lo descompone en triángulos de una manera cualquiera y se hace la suma de los segmentos *t* correspondientes a todas estas partes triangulares, se obtendrá como suma siempre el mismo segmento, cualquiera sea la descomposición adoptada. Podremos definir en cada caso este segmento suma como *área del polígono* y se obtendrá que *si un polígono se compone por suma y diferencia de otros polígonos, su área se compone del mismo modo como suma y diferencia de las áreas de los polígonos componentes.*

Queda establecida así una correspondencia entre polígonos y segmentos, tal que a toda suma y diferencia geométricas definidas por reunión y supresión de partes poligonales corresponde la análoga suma y diferencia de segmentos correspondientes. La posibilidad de aplicar las nociones comunes a las áreas poligonales está reducida a lo análogo para los segmentos. Por cuanto para este caso la validez de las nociones comunes ya se ha admitido como más o menos explícitamente contenida en los postulados 1, 2, 3 y en las construcciones con las que empieza el Libro I, queda eliminada toda duda aun para las áreas poligonales; y la teoría de la equivalencia se establece definitivamente, y con ella el álgebra geométrica del Libro II y del Libro VI, conjuntamente con los pocos teoremas que todavía faltan, más propiamente

referentes a la semejanza. Y todo independientemente de cualquier noción intuitiva (o axiomática) acerca de la equivalencia o relacionada con el llamado teorema de Eudoxo-Arquímedes y por un camino para el cual los tres primeros Libros parecen constituidos adrede.

¿A qué se debe que Euclides deje trunco el Libro III y, después de las aplicaciones del IV, tome una dirección diferente?

Como antes advertimos, la tradición atribuye a Eudoxo las ideas directoras del Libro V y del Libro XII de los *Elementos*, estando los dos, en verdad, estrechamente vinculados más que nada porque uno y otro, aunque indirectamente, anticipan las modernas nociones sobre números reales y sobre límites; y porque en las aplicaciones del Libro XII es donde podemos descubrir las razones de aquel cambio de dirección, pasando de la consideración de las figuras planas y rectilíneas a una indeterminada noción de *magnitudes*, que a la altura en que se encuentra el Libro V aparece un tanto inexplicable. Una tradición que posiblemente se funda principalmente sobre la necesidad de dar nombres a las cosas y sobre algunas indicaciones genéricas que se leen en el resumen histórico de Proclo, al cual nos referimos desde el principio de nuestro discurso.

Proclo, después de haber nombrado a Arquitas, Theetetes, Neóclides y León (de estos últimos nada más sabemos) dice: "Eudoxo de Cnido, un poco más joven que León y discípulo de los amigos de Platón, fue el primero en aumentar el número de los teoremas *generales*; añadió tres *analogías* a las tres conocidas e hizo progresar las cuestiones relativas a la *sección*...", una alusión que muy bien, en su extrema indeterminación, puede referirse a las proporciones (analogías) y a la

semejanza. Aceptaremos pues atribuir el nombre de Eudoxo al nuevo punto de vista.

El método de Eudoxo impone en primer lugar aceptar una nueva limitación al concepto de magnitud; es la que se acostumbra llamar postulado de Arquímedes o de Eudoxo: "Dadas dos magnitudes homogéneas siempre es posible encontrar un múltiplo de una cualquiera de ellas que sea mayor que la otra". Debemos notar que, en un principio, parece que Euclides se rehusa a admitir un nuevo axioma y prefiere limitar por una definición una clase particular de magnitudes (Libro V, Def. 4): *Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando cada una puede ser multiplicada de manera de superar a la otra*[5]; y podemos pensar también que cierta repugnancia encontrara la proposición a ser transpuesta como atributo general de las magnitudes aun después de Euclides, observando que, cuando Arquímedes, en el prefacio al tratado de la *Cuadratura de la parábola*, enuncia la proposición lo hace explícitamente para la clase particular de magnitudes que le interesan: "Dadas dos áreas desiguales, el múltiplo de la diferencia puede superar toda área finita" y se justifica además por admitirla como axioma citando a los geómetras anteriores que no se habían conducido diferentemente. Entre

[5] Compare el lector las consideraciones expresadas aquí y las siguientes con las palabras de Sócrates en la *República* que referimos en la página 34 y con la nota histórica sobre el tiempo en que vivió Eudoxo. La noticia de Proclo-Eudemo de que Eudoxo, bastante más joven que Platón, pero muerto antes que él, no fue sin embargo discípulo directo suyo, concuerda muy bien con el hecho de que Theetetes y no Eudoxo sea recordado en los diálogos.

estos geómetras parece bien natural incluir a Euclides, pues para él parecen propiamente destinadas las palabras: "Aun los geómetras anteriores han usado este lema. El teorema que dice que los círculos están entre ellos como los cuadrados de los diámetros ha sido demostrado por ellos precisamente por medio de este lema, y lo mismo debe decirse de la demostración del teorema que las esferas están entre ellas como los cubos de los diámetros. Por medio de este lema o de otro análogo ellos han demostrado igualmente que toda pirámide es igual a la tercera parte de un paralelepípedo de igual base e igual altura, y que todo cono, etc.". Alusiones inmediatas a XII, 2 - XII, 18 - XII, 7 - XII, 10.

De cualquier modo, Euclides, para exponer una teoría general en el Libro V, considera la cuestión como una posibilidad, más o menos en el mismo nivel, como era una posibilidad la de medir por números enteros; una posibilidad por cierto bastante comunmente verificada como para que convenga darle un nombre, pero no lógicamente necesaria; y aun es interesante que, al elegir el vocablo *razón* para formar este nombre, tenemos un recuerdo de aquella otra; hasta Platón –o Sócrates, Theodoro, Theetetes, como se quiera decir– una magnitud era *racional*, es decir *expresable*, cuando era numéricamente representable por comparación con otra que se suponía asignada. La propiedad postulada en la def. del Libro V se realiza siempre cuando la palabra *racional* puede aplicarse en ese antiguo significado; pero es mucho más general, y sin embargo, por medio de cierto artificio que aparecerá en la def. 5, permitirá llegar a las mismas consecuencias esenciales. Debe aun notar el lector que, mientras en nuestra terminología matemática la palabra *racional* ha adquirido un significado técnico determina

do, este significado es todavía variable en el griego, como se ve por ejemplo nuevamente en el Libro X def. 3, donde se incluyen en las racionales las irracionales cuadráticas.

Euclides, pues, se queda prudentemente a hablar de definición. Sin embargo, a esta def. 4 precede otra mucho más sospechosa (def. 3): *Razón es una relación entre magnitudes homogéneas, con respecto a la cantidad*; claro es que ésta, con los términos indefinidos de "relación" y de "cantidad" no puede servir a nada positivo; y aunque hemos admitido desde el principio que no siempre hay que pretender en las definiciones euclidianas una estructura rigurosamente lógica, está el hecho de que mientras se proponía una para definir el *tener razón*, ya no habría sido más necesario explicar mayormente la palabra *razón*.

Se trata en verdad de que, mientras el Libro V es todavía un modelo de construcción lógica, y con respecto al contenido del Libro la def. 3 es efectivamente una inútil intrusión, por el contrario, cuando en los Libros sucesivos Euclides quiere hacer aplicación de la teoría desarrollada, no sabe más mantenerse igualmente riguroso. Así en el Libro XII, donde se habla de la razón entre figuras de contorno curvo (círculos y sólidos redondos), no se sabe en rigor dar un significado al vocablo *multiplicar* si no es con atribuir a esas figuras una "cantidad" por una indeterminada intuición que es sin duda aquella a la g+``que se refiere la def. 3; y por el contrario, la def. 4 resulta, como tal, del todo inútil para el lector de los Libros que siguen al V, pues sin mayor aviso, siempre se admite que ella sea realizada por las magnitudes allí consideradas: así para triángulos, paralelogramos, segmentos en la prop. 1 del Libro VI, para áreas y volúmenes cualesquiera en el Libro XII, mientras la prop. X, 1 ofrece, bajo la forma de teorema y sin

reservas acerca de las magnitudes consideradas, una transformación de la def. 4 esencial para las aplicaciones sucesivas.

Con las definiciones 5 y 7 del Libro V Euclides introduce para las "razones" las nociones de igualdad y de mayor y menor y con las prop. V, 11 y V, 13 demuestra que ellas realizan las ordinarias propiedades transitivas de las relaciones =, >, <. Pero no puede demostrar que existe la cuarta proporcional respecto de 3 magnitudes dadas; esto podrá hacerlo solamente en el Libro VI para los segmentos, valiéndose de los medios que estaban a su disposición y que conocía ciertamente antes de orientarse hacia Eudoxo; conociendo el teorema para los segmentos, resulta clara su validez aun para las áreas poligonales por cuanto le concedemos –aunque él no lo recuerde explícitamente– que ya había establecido entre las dos clases de magnitudes la correspondencia unívoca que arriba hemos indicado y que todavía se confirma por los teoremas del Libro VI; pero esto no le es suficiente para el Libro XII. Tampoco puede demostrar, lo que acaso para este fin le bastaría, que "si la razón de a a b es mayor que la de c a d, existe una magnitud e tal que la razón de c a e es intermedia entre la primera y la segunda". Se trata de admitir algún nuevo postulado que represente en alguna medida lo que llamamos postulado de Dedekind o de la continuidad. ¡Quizás la magnífica armonía alcanzada hace que le parezca un sacrificio demasiado grande reconocer la necesidad de admitir por mera afirmación algún concepto nuevo!

En el orden conceptual, lo que nos presenta de absolutamente nuevo el Libro V, más todavía que la afirmación del postulado de Eudoxo-Arquímedes –sea ésta como característica general de las magnitudes geométricas, sea como limita-

ción a una determinada clase de magnitudes– es el modo de definición de la igualdad de razones (*proporción* en nuestra terminología, *analogía* en la terminología de Euclides):

Def. 5. *Se dice que la razón de una primera magnitud a una segunda es igual a la de una tercera, a una cuarta si, tomando equimúltiplos cualesquiera de la primera y de la tercera y equimúltiplos cualesquiera de la segunda y de la cuarta, si el múltiplo de la primera es mayor que el múltiplo de la segunda, también el múltiplo de la tercera es mayor que el múltiplo de la cuarta; si es igual, igual; si menor, menor.*

Brevemente, será A : B = C : D, siempre y sólo cuando, *cualesquiera* sean m, n, se realizan conjuntamente las homólogas entre las relaciones

$$m\text{A} > n\text{B} \quad m\text{A} = n\text{B} \qquad m\text{A} < n\text{B}$$
$$m\text{C} > n\text{D} \quad m\text{C} = n\text{D} \qquad m\text{C} < n\text{D}$$

La novedad consiste en eso que, mientras en todos los casos anteriores la definición de una determinada propiedad geométrica implica, para su averiguación, una sucesión finita y determinada (en su naturaleza y número) de operaciones, la averiguación de la igualdad de las razones entre dos pares de magnitudes, depende, conceptualmente, de una infinidad de operaciones. Si la razón entre las magnitudes A y B no es igual a la razón entre C y D, siempre nosotros podremos darnos cuenta de eso mediante un número finito de pruebas –aunque indeterminadamente grande–; porque existiendo por hipótesis un par de números m, n tal que a una de las relaciones mA> , <nB no corresponde la homóloga en la comparación de mC y nD, bastará que nosotros pasemos revista a la

sucesión de los pares (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), ... convenientemente ordenados por valores crecientes de los términos para llegar, después de un número finito de pruebas al par (*m*, *n*). Pero si nosotros emprendemos la sucesión de las pruebas y nos encontramos con que siempre se realizan las relaciones homólogas, en cualquier momento de nuestra prueba no tendremos ninguna seguridad de que aun será positiva la prueba sucesiva; esto es, no tenemos ningún modo, según la definición, de afirmar la igualdad de razones [6].

Euclides va a resolver esta dificultad en los Libros sucesivos, tratando clases particulares de magnitudes; en el Libro VI da la condición necesaria y suficiente, fundada sobre una construcción geométrica, para que dos pares de segmentos sean proporcionales (VI, 2) y sucesivamente (VI, 16 a 22)

---

[6] Apenas es de recordar que la observación no se aplica en el caso particular de haber encontrado un par de números (*m*, *n*) tal que *m*A = *n*B y *m*C = *n*D; entonces las razones de A : B y C : D son iguales y representadas por un número racional; en efecto, si (*p*, *q*) es otro par de números, según sea *p*A >, =, < *q*B, será *pm*A >, =, < *qm*A ; además, por la hipótesis, *pm*A = *pn*B; esto es *pn*B >, =, < *qm*B, *pn* >, =, < *qm*; por otra parte, también por la hipótesis, *pm*C =*pn*D; luego *pm*C >, =, < *qm*D es decir *p*C >, =, < *q*D. Aunque no se encuentre en el texto euclídeo esta deducción por no encontrar aplicación inmediata, el razonamiento está completamente en el marco de los *Elementos*. Por otra parte, el mismo razonamiento puede imitarse para demostrar que si existe un par de números (*m*, *n*) tales que *m*A = *n*B, *m*C < *n*D, y si (*p*, *q*) es tal que *p*A = *q*B, será también *p*C < *q*D; y esta demostración, que también falta explícitamente en los *Elementos*, es esencial para afirmar que la definición de la relación de mayor y menor entre razones dada por Euclides (ver def. 7) es consistente.

reduce a la misma el problema cuando entre las magnitudes entran áreas poligonales; luego, en los Libros XI y XII trata el mismo problema para los paralelepípedos, los poliedros, los círculos y los cuerpos redondos. Pero es extremadamente notable el hecho de que en el Libro V se desarrolle una teoría general razonando sobre la hipótesis de infinitas averiguaciones, posibles en forma puramente mental, y que de ninguna manera se sepa reducir a un número finito. Es precisamente lo que en el análisis moderno ocurre con la noción de límite, y es por eso que, desde el principio, anunciamos en Eudoxo la primera aparición de este concepto. Por otra parte, también en el análisis moderno, cuando de las nociones generales queremos pasar a conclusiones concretas sobre números y funciones, debemos circunscribir el campo de manera que las infinitas pruebas se sustituyan por un número finito de operaciones definidas, al menos conceptualmente.

Las teorías modernas han sustituido con preferencia a la consideración de múltiplos indefinidamente grandes la de submúltiplos indefinidamente pequeños, perdiendo en alguna parte la elegancia de Euclides, y obteniendo en compensación una mayor adherencia a la intuición y una mayor flexibilidad en los razonamientos. Es interesante notar cómo aparece difícil para los sabios del Renacimiento científico aceptar la concepción euclidiana de "múltiplos según números cualesquiera" y entender su definición de la proporcionalidad mientras parecía que la noción de razón (como la de número) fuera algo primitivo, asemejable, ella misma, a una magnitud.

Galileo, en la tercera jornada de los *Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, entiende definir y estudiar el movimiento uniforme (y después el uniformemente acelera-

do) e imita (principalmente en el primer caso), en la forma, las demostraciones euclídeas sobre la proporcionalidad. Dice Galileo a propósito del movimiento uniforme: "Entiendo por movimiento uniforme aquel en que los espacios recorridos por un móvil en cualesquiera tiempos iguales son iguales entre sí"; y comenta: "Me ha parecido bien añadir a la antigua definición (que llama movimiento uniforme simplemente a aquel en que espacios iguales son recorridos en tiempos iguales) el vocablo *cualesquiera*, pues puede suceder que el móvil recorra espacios iguales durante tiempos iguales, y que, sin embargo, no sean iguales los espacios recorridos durante algunas fracciones más pequeñas, aunque entre sí iguales, de esos mismos tiempos". A continuación aplica luego tal definición para demostrar (teor. I) que los tiempos de los trayectos son entre sí como los espacios recorridos, siguiendo aparentemente las huellas de Euclides: considerando dos rectas, y representando en una por dos segmentos AB, BC los espacios recorridos, y en la otra por los segmentos DE, EF los tiempos correspondientes, se trazan segmentos múltiples de unos y de otros y se imagina que el móvil tuviera que moverse durante los nuevos tiempos, afirmando que recorrería los nuevos espacios correspondientes. Se ve fácilmente que se trata de una imitación formal por no haber entendido exactamente el significado de los detalles euclidianos; ya que el tiempo no es segmento, y nada habría impedido usar para representar los tiempos los mismos segmentos de los espacios recorridos, destruyendo así toda apariencia de demostración; en la práctica es precisamente así que Galileo mide el tiempo. Y si se hubiera tenido que respetar la concepción euclidiana, hubieran sido espacios recorridos en dos tiempos correspondientes los que se habría debido

comparar como cantidades estáticas, independientes (después de físicamente generadas) de toda relación con el fenómeno antes o después; la consideración de Galileo sobre la palabra cualesquiera es plenamente justificada como observación física, y probablemente podía ser inmediatamente sugerida por el péndulo, que recorre espacios iguales en tiempos iguales cuando estos tiempos son sensiblemente múltiplos del semiperíodo, aunque no tiene movimiento uniforme; pero ninguna relación tiene ella con el "cualesquiera" de la definición euclídea, referido a los multiplicadores *m*, *n*. Ahora, es notable que el malentendido apareció probablemente al mismo Galileo sin que él viera exactamente dónde estaba el error. En la quinta jornada se reúnen nuevamente los contertulios después de varios años de separación, durante los cuales cada uno por su cuenta había reflexionado sobre las discusiones de las anteriores jornadas, y la primera cuestión que se pone es precisamente la definición euclídea de la proporcionalidad. Es de notar que la demora de varios años no es puramente una ficción literaria: la quinta jornada es efectivamente un apéndice añadido varios años después y no existente en la primera edición de los *Diálogos*; si no eran los interlocutores del diálogo los que en ese tiempo habían reflexionado, era el mismo autor, y quizás oyendo objeciones de amigos y de críticos a sus primeras demostraciones. Y la cuestión que se plantea en esa quinta jornada es la de entender el "cualesquiera" de Euclides: "¿Quién tendrá ingenio tan feliz como para tener la certeza de que, cuando las magnitudes son proporcionales, los equimúltiplos concordaran siempre?(...) Si el lector ya tiene concepto de qué es la proporción entre dos magnitudes, le resultará muy difícil entender que esa relación o comportamiento que tiene

la primera magnitud a la segunda sea semejante a la relación o comportamiento entre la tercera y la cuarta, cuando aquellos equimúltiplos de la primera y de la tercera concuerden siempre en dicha manera con los equimúltiplos de la segunda y de la cuarta en ser siempre mayores, o menores, o iguales. Como quiera que eso sea, me parece este resultado de Euclides más bien un teorema por demostrar que una definición que anteponer. Mas, como me encontré con tantas personas de ingenio que han encallado en este lugar(...)".

No podría haber testimonio más claro de la dificultad que la llamada intuición, o si se quiere, la inercia común en conformarse con las sugestiones de la costumbre, ha tenido siempre para entender la sutileza lógica del Libro V. Pocos años después de la muerte de Galileo y de la publicación del diálogo de las nuevas ciencias, su alumno, Alfonso Borelli, propone como fin principal a su reconstrucción del Euclides el de eliminar tales dificultades en la teoría de las proporciones. Dejándose guiar por el concepto que está implícito en la pregunta con la cual empieza la quinta jornada, admite como postulado no enunciado que las razones entre magnitudes inconmensurables se ordenan conjuntamente a las razones entre magnitudes conmensurables según la relación de mayor y menor formando un sistema bien ordenado tal que entre dos razones cualesquiera existe siempre alguna racional (Libro III, Def. X) : "Si de cuatro magnitudes las antecedentes fueran inconmensurables con las consecuentes y la razón de las dos primeras fuera mayor, y la razón de las otras dos menor que alguna otra razón conmensurable, se dirá que la primera razón es mayor que la segunda". Def. XI: Igual que la anterior cambiando las palabras mayor y menor. Def. XII

"Y si en aquellas inconmensurables magnitudes la razón de la primera a la segunda no fuera mayor ni menor que la razón inconmensurable entre la tercera y la cuarta, decimos que la razón inconmensurable de la primera a la segunda es la misma o semejante a la de la tercera a la cuarta".

El esfuerzo por sustituir la teoría euclidiana de las proporciones abre así el camino a la moderna noción de *número real*, pues éste es propiamente la *razón* de la cual habla Borelli. Había que limpiarla y liberarla de la intrusión de las magnitudes.

Nuestro actual *número real* no difiere en mucho del *segmento* de Theetetes, complementado con las nociones de límites que atribuimos a Eudoxo. Número y segmento son *ideas primitivas* que nosotros concebimos por haber llegado nuestro entendimiento a cierto grado de madurez debido a las dificultades encontradas en un estado anterior de las teorías aritméticas y geométricas. (En el caso de Theetetes se trata de la separación de la noción de segmento de la de longitud, expresable por números enteros o quebrados; en el caso del número real, se trata de una ulterior abstracción que del segmento separa y reúne lo que es independiente de construcciones geométricas.) Los segmentos, como los números reales, se ordenan según la relación de mayor y menor, de manera que, suponiendo fijado uno de ellos, todos los demás quedan separados en dos clases, la de los números menores que él y la de los mayores. Pero la noción euclidiana de segmento no invierte la proposición –evidentemente porque el desarrollo del pensamiento no ha llevado a Euclides a la necesidad de hacerlo. Esta necesidad se le habría presentado si hubiera querido llegar a una representación segmentaria de la longitud de la circunferencia o del área del círculo. Veremos en el Libro XII

que de la primera no se ocupa, aun habiendo creado todas las premisas para hacerlo, y para la segunda se contenta con su existencia geométrica ligada a la existencia del círculo. Pero Euclides no considera otros segmentos que los que se pueden construir efectivamente con la regla y el compás. También, Euclides habría sido llevado próximo al número real si en el Libro V se hubiera preocupado en demostrar la existencia de la cuarta proporcional de tres magnitudes dadas, pero él podía despreciar ese problema general por cuanto las magnitudes que efectivamente tenía que considerar eran segmentos o referibles a segmentos, y para éstos el teorema de Thales proporcionaba la demostración geométrica y constructiva.

El llamado postulado de Dedekind presenta aquella inversión. Cabe terminar reproduciendo algunas líneas del mismo Dedekind en su fundamental opúsculo: *Continuidad y números irracionales* (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1872), para su comparación con el rápido resumen anterior y aun con la costumbre que se ha introducido en la moderna didáctica de atribuir carácter de definición a la noción de los números reales. Dedekind usa todavía la expresión "punto de la recta" para significar "número real"; pero pone de relieve que ella adquiere un significado más preciso del que necesita para las cuestiones de la Geometría: "La propiedad de la recta expresada por este principio de continuidad no es sino un postulado y es solamente bajo esta forma que nosotros concebimos la continuidad de la recta. No es para nada necesario que el espacio, si es que tiene una existencia real, sea necesariamente continuo...". No era necesario referirse al espacio como existencia real; sino que era suficiente el espacio geométrico de Euclides limitado a lo que se puede construir con la regla y el compás

IV

El método de Exhaución

La primera proposición del Libro X dice: *Asignadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda se resta una magnitud mayor que su mitad y si esta operación se repite sucesivamente, quedará finalmente una magnitud menor que la menor magnitud propuesta.* En lenguaje más corto y más moderno: si a_1, a_2,... es una sucesión infinita de números todos menores que 1/2, y A es una magnitud finita, existe un n tal que la magnitud $a_1a_2 \ldots a_n$ A resulta menor que cualquier otra magnitud asignada, homogénea con A.

Esta proposición sirve a Euclides en este lugar únicamente para deducir por absurdo la proposición siguiente: *Dadas dos magnitudes desiguales, si, restando varias veces sucesivas la menor de la mayor, ninguna de las magnitudes que se obtienen como restas mide a la anterior, las magnitudes dadas serán inconmensurables.* Ahora bien, puede observarse que para este fin la X, 1 es en verdad un instrumento excesivamente fuerte; en efecto, para conseguir el absurdo, basta referirse a la prop. X, 5: *Las magnitudes conmensurables tienen entre ellas la razón que un número tiene a otro número* (siendo estos números respectivamente los números de veces que la medida común está contenida en las magnitudes dadas), cuya demostración es independiente de las anteriores y del todo inmediata, y que reduce la cuestión a la prop. VII 1. Si a Euclides le resultó cómodo y natural

referirse a la X, 1, la explicación más probable es que esta X, 1 estuviera a la mano por su aplicación esencial en el Libro XII; pues, según explicamos en el capítulo anterior, tiene este XII importancia conceptual y por lo tanto filosófica en la formación de los *Elementos*, mientras el X es, en el conjunto, posiblemente uno de los pocos a los que puede atribuirse preferentemente significado técnico, más análogo a lo que se llama hoy investigación.

La demostración euclidiana de la prop. X, 1 no difiere esencialmente de la que se usa hoy para demostrar la proposición equivalente: si $k > 1$, entonces lim $(1/k)^n = 0$. Si así no fuera, existiría un $m > 0$ tal que, cualquiera que sea el número natural n, sería $m.k^n < 1$; pero, si se ha puesto $k = 1 + h$, $k^n > 1 + nh$; y el postulado de Arquímedes nos asegura que para n bastante grande $mnh = n.mh > 1 - m$; de aquí el absurdo. Para Euclides el h es 1; y aunque pueda observarse que $1 + nh$ son los primeros términos del desarrollo de Newton de $(1 + h)^n$, no conocido por él, en realidad, propiamente imitando a Euclides, la desigualdad $(1 + h)^n > 1 + nh$ se obtiene lo más simplemente por inducción.

Sobre esta proposición X, 1 se funda el llamado *método de exhaución (agotamiento),* el cual representa en el pensamiento euclidiano lo que para nosotros es el *método de las series.* Se tiene cierta magnitud A de una clase a la cual no se aplican los procedimientos de composición por suma y resta (yuxtaposición y supresión) de figuras elementales (segmentos, triángulos, paralelogramos, prismas, etc.); pero sobre las magnitudes como A, Euclides sabe aplicar una operación de "restar más que la mitad", la cual únicamente hace uso de aquellas figuras elementales; ¿qué será la suma de las infinitas figu

ras elementales que han aparecido en las sucesivas operaciones de resta, sino un representante de la misma A? Dicha suma está formada por términos cada uno de los cuales es menor que la mitad del anterior (serie convergente); y el resto de esta serie *respecto de la magnitud* A tiende a 0. La diferencia con el método de las series está en las palabras subrayadas; la demostración de convergencia constituye para nosotros la definición de un número, el límite, según lo enuncia el postulado de Dedekind y el resto de la serie es la diferencia a este límite. Para Euclides el postulado de Dedekind no tiene razón de ser porque el límite existe, geométricamente dado, antes de ser generado por la serie.

Puede ser interesante notar que todavía la parte elemental de nuestra actual teoría de las series se refiere, como elemento de parangón, a la serie geométrica. El hecho observado en las líneas anteriores de cualquier razón menor que 1 lleva igualmente al resultado, mientras que Euclides se fija precisamente en la razón 1/2, es detalle insignificante; prácticamente no le necesita más y la elección contribuye a la uniformidad del procedimiento que él va a aplicar a una variedad de casos; y la razón 1/2 tiene un motivo de preferencia en el hecho de que la serie 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... era anteriormente conocida por los griegos por tener suma 1, es decir, el todo de la magnitud que se intenta medir.

Acá notamos también cierta preocupación en el autor por introducir gradualmente al lector en la aplicación del método. Después de una proposición preparatoria (XII, 1), que habría tenido sin más su lugar natural en el Libro VI al lado de otras análogas, la XII 2 enuncia que *los círculos están entre sí como los cuadrados de los diámetros*. Encontramos aquí

algunas dificultades conceptuales referentes exclusivamente al hecho ya aludido de tener que tratar con una noción de magnitud mucho más vaga que las magnitudes geométricas de los primeros Libros y del VI; tan vaga precisamente como en el Libro V. ¿Qué puede significar la razón entre círculos? La definición 4 del Libro V ya no puede aplicarse más pues no tiene sentido geométrico lo de sumar (multiplicar por un número natural) círculos; es una noción genérica de *área* la que Euclides tiene presente aquí, a la cual le aplica la def. 3. Y hace todavía más, pues admite como hecho de intuición que exista un determinado espacio (área) cuarto proporcional de tres dados. ¡Pues bien! Una vez hechas estas concesiones a la intuición, Euclides habría podido, sin alejarse en nada de un razonamiento que hace poco después, llegar al resultado sin aplicar el método de exhaución.

Veamos el razonamiento.

En XII, 1 se establece que polígonos semejantes inscriptos en dos círculos están entre ellos como los cuadrados de los diámetros (por VI, 20 ya se sabía que los dos polígonos, por ser semejantes, están entre sí como los cuadrados de los lados homólogos, y sólo queda pasar de los lados homólogos a los diámetros de los círculos circunscriptos). Para extender en XII, 2 la proporcionalidad de los polígonos a los propios círculos, dice Euclides: supongamos, por el absurdo, que los círculos no fueran proporcionales a los cuadrados de los diámetros; buscando el cuarto proporcional respecto de estos dos cuadrados y uno de los círculos, se encontrará un espacio que no será igual al otro círculo y que, eligiendo oportunamente el círculo de llamar primero, podremos suponer menor que ese otro; llamemos S a este cuarto proporcional. Si al mismo tiem

po consideramos polígonos inscriptos en el primer círculo, y luego menores que él, y buscamos igualmente los cuartos proporcionales de los cuadrados de los diámetros y cada uno de estos polígonos, obtendremos siempre magnitudes menores que S. Pero por XII, 1 estos cuartos proporcionales son los polígonos inscriptos en el segundo círculo y semejantes a los que se habían considerado en el primero. La hipótesis hecha equivale por lo tanto a decir que los polígonos inscriptos en el segundo círculo quedan siempre menores que éste en una cantidad no inferior a la diferencia entre el círculo y S. Pero observamos ahora que el triángulo inscripto en un sector circular, con vértice en el punto medio del arco, por ser la mitad del rectángulo circunscripto al sector, es mayor que la mitad del propio sector; si pues, partiendo de un polígono inscripto cualquiera, vamos añadiéndole sucesivamente los triángulos isósceles inscriptos en los sectores que tienen por base los lados, por X, 1, llegamos a construir una sucesión de polígonos inscriptos cuya diferencia al círculo terminará por ser menor que la existente entre S y el mismo círculo. He ahí el absurdo.

Que no fuera aquí propiamente necesario el método de exhaución nos lo dice Euclides mismo cuando en XII, 16 demuestra que "dados dos círculos concéntricos puede inscribirse en el mayor un polígono cuyos lados no tocan el círculo menor"; pues si imaginamos que al área S se le da la forma de un círculo concéntrico al segundo círculo dado (lo que no es concesión cuando ya se supone poder hablar sin mayor precisión de una diferencia entre el espacio S y dicho círculo), la proposición enunciada nos enseña sin más a construir un polígono inscripto en el segundo círculo y mayor que S, que es el absurdo.

Notaremos de paso que este último razonamiento no difiere esencialmente de aquel por el cual en 1658 A. Borelli quiere sustituir la definición euclidiana de la proporción en el caso de magnitudes inconmensurables por la condición de ser una de las razones ni mayor ni menor que la otra; o acaso del razonamiento por el cual, algún decenio antes, propone Galileo en la quinta jornada de los *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due scienze nuove* con el fin de transformar en teorema la definición euclídea.

La proposición XII, 2, por su tan extrema vinculación a la XII, 1, podía ciertamente ser aceptada en tiempos de Euclides como verdad intuitiva, por cierto no menos intuitiva que la existencia del cuarto proporcional; el teorema en el cual, por opuesto, la aplicación del método de exhaución se hace imprescindible y donde todavía se demuestra admirable la habilidad del matemático, llámese Euclides o bien Eudoxo, es el de la equivalencia de pirámides triangulares con igual altura y bases equivalentes, que será fundamental para la descomposición del prisma triangular en tres tetraedros equivalentes (XII, 7), base de toda la teoría de los volúmenes. Euclides, para aproximarse más al modelo formado por XII, 2, se propone demostrar sin más una pequeña generalización: las pirámides triangulares de igual altura son entre ellas como las bases (XII, 5). Y como para XII, 2 sirve de preparación XII, 1, que establece la proposición pedida para el caso más simple de los polígonos inscriptos en el círculo, el término de parangón serán aquí los prismas; en efecto, los prismas de igual altura son entre sí como sus bases (XI, 32). Lo que llamamos habilidad es el inserir estos prismas en las pirámides según el esquema del principio de exhaución; y he aquí la

XII, 3: *Toda pirámide triangular se divide en dos pirámides semejantes a ella y de bases iguales, y dos prismas iguales. Los prismas conjuntamente son más que la mitad de la entera pirámide.* Desde luego el enunciado es un poco confuso y debemos leer la demostración. Dada la pirámide ABCD, fijemos los puntos medios de los lados: sean E, F, G, H, K, L. Los planos HKL, HGE separan en la pirámide dos pirámides iguales entre sí y seme-

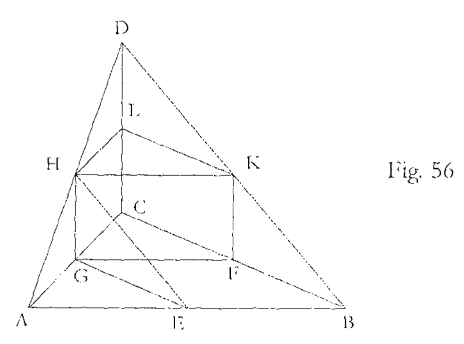


Fig. 56

jantes a la mayor, con lados mitad de los de ésta. Queda el sólido comprendido entre los triángulos, HKL, HGE, los paralelogramos HEBK, HGCL y los trapecios BCGE, BCLK. Si trazamos el plano HKFG, este sólido queda dividido en dos prismas triangulares; uno GCFHKL tiene altura mitad de la de la pirámide y las bases semejantes a la de la pirámide, con lados mitad, si consideramos como base de la pirámide la cara ABC; el otro BFKEGH se encuentra en análogas condiciones respecto de la cara BCD. Se ve fácilmente que son equivalentes considerándolos como mitades de los dos paralelipípedos GEFCHMKL, GEBFHMNK de igual altura y bases equivalentes (ver fig. 57). Así las dos primeras afirmaciones de la proposición están realizadas. Si ahora se

traza todavía el plano KEF, éste corta en el prisma BFKEGH la pirámide BEFK igual a las dos anteriores AEGH, HKLD;

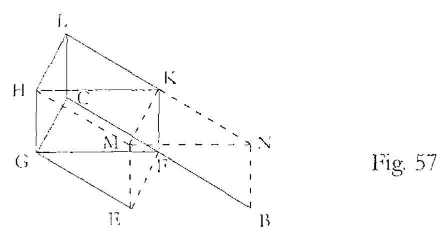


Fig. 57

queda pues que cada uno de los prismas es mayor que una de las pirámides y conjuntamente los dos son mayores que la mitad de la pirámide dada.

Nuestra preparación es ahora completa: dadas dos pirámides triangulares de igual altura, en cada una separamos los prismas como se ha indicado, de estos prismas hay dos, un prisma en cada pirámide, que tienen igual altura (la mitad de la altura común de las pirámides) y las bases proporcionales a las bases de las dos pirámides; los otros dos, por ser respectivamente equivalentes a los primeros, tienen la misma razón; los prismas son por lo tanto entre sí como las bases de las dos pirámides. En los dos pares de pirámides repetimos la misma operación, y así continuamos. El razonamiento de XII, 2 se repite ahora sin cambios. Es éste el argumento de XII, 4 y XII, 5.

En la proposición XII, 7 Euclides demuestra que si en un prisma triangular se trazan los planos que desde la diagonal de una cara proyectan los dos vértices opuestos, el prisma resulta descompuesto en tres tetraedros que, por las proposiciones anteriores, resultan iguales (equivalentes); el procedimiento ha pasado a ser común todavía en los libros

elementales. De él resulta que la pirámide es 1/3 del prisma de igual base a igual altura. Sin embargo, la posibilidad de tal artificio puede calificarse de coincidencia afortunada, pues profundizando un poco el método de exhaución, Euclides habría podido llegar al resultado directamente por el razonamiento anterior. Este paso lo hizo Arquímedes en el tratado de la *Cuadratura de la parábola*, problema que, como se sabe, puede considerarse como una transposición del problema del volumen de la pirámide.

En efecto, por un simple corolario del teorema XI, 33 (que si no está escrito sólo depende de que sin utilizarlo, Euclides llega en XII, 8 a un resultado aparentemente más general) Euclides está en condición de afirmar que cada uno de los prismas de los que trata la prop. XII, 3 vale 1/8 del prisma que tiene misma base y misma altura que la pirámide. Llamemos P a este prisma. Los dos prismas juntos valen pues 1/4 de P. Si sobre las dos pirámides AEGH, HKLD se repite la misma operación, se separan cuatro nuevos prismas cuya suma se ve enseguida, por el mismo razonamiento, que es 1/4 de la anterior. Se puede seguir aplicando la operación de separar prismas, y por otra parte es precisamente lo que hace Euclides en la aplicación del método de exhaución; se concluye que la suma de todos estos prismas será en cualquier momento la parte del prisma P que está expresada por la suma de cierto número de términos de la serie

$$1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \ldots$$

Arquímedes se encuentra con la misma conclusión cuando, para determinar el área del sector parabólico ABC, empieza con restarle el triángulo ABC, que llamaremos nue

vamente P (ver fig. 58); considerando entonces los dos sectores laterales ADB, BEC e inscribiendo en ellos los triángulos ADB, BEC, teniendo en cuenta que FB = BG, HD = DL, KE = EM, HK = 1/2 AC, se obtiene que la suma de estos triángulos es 1/4 P. Basta entonces repetir la misma consideración sobre los cuatro sectores que quedan al lado de dichos triángulos y así sucesivamente.

Arquímedes efectúa la suma de la serie por el mismo método de exhaución. Observa que 1/4 + 1/3 × 1/4 = 1/3 y que, por consecuencia (Prop. XXIII) si a la suma de un número cualquiera de términos de la serie se agrega 1/3 del

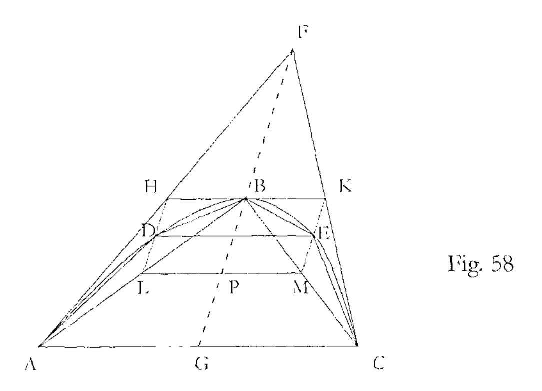


Fig. 58

último, se obtiene por suma 1/3; luego (Prop. XXIV), por exhaución deduce la equivalencia entre la suma de los sectores ADB + BEC y 1/3 P, es decir, de todo el sector ABC y 4/3 P = 2/3 AFC.

En el caso de la pirámide basta que nos paremos en la primera conclusión.

V

Los Libros Aritméticos

Hemos admitido que el incentivo de Euclides, esto es, de Theetetes, Eudoxo o de quienes más han participado de aquella escuela de filósofos-geómetras, para construir una teoría de las magnitudes geométricas independiente de la medición por números pudo haber sido la existencia de cuadrados cuya área está representada por enteros cualesquiera; y no siempre es posible una representación análoga para los lados de estos mismos cuadrados. Pero el Theetetes platónico no se satisface con esto; no le basta saber que existe lo irracional; él se ha planteado la pregunta acerca de cuándo ello ocurre y ya en el diálogo nos da la contestación: cuando el número que mide el cuadrado no es cuadrado de un número entero. Pero ¿cómo lo ha demostrado?

Leyendo a Euclides (Libro X) aprendemos algo más: es posible construir cuadrados cuya área debe representarse por cualquier irracional conocido, ¡y el lado de este cuadrado representará una irracionalidad nueva! ¡En comparación con lo conmensurable, lo inconmensurable representa más bien la regla que la excepción!

A alcanzar estos resultados están destinados los Libros aritméticos desde VII a X. La lectura es en ellos más pesada por cierta prolijidad que en buena parte obscurece el camino y obliga a cierto esfuerzo para elegir lo esencial dentro del

gran número de proposiciones (el Libro X es el más largo de toda la obra con 115 proposiciones). Quizás pueda pensarse una explicación en la preferencia de la anterior escuela pitagórica por maniobrar con los números en formas preferentemente figurativas y experimentales y la necesidad consiguiente, para adaptarse a exigencias de las costumbres, de detenerse sobre detalles e insistir sobre la novedad del razonamiento.

El Libro VII empieza, en las proposiciones 1, 2, 3, ofreciéndonos el instrumento que es todavía hoy el fundamento de la aritmética multiplicativa: el método de las divisiones sucesivas para la determinación del máximo común divisor.

VII, 1. *Dados dos números desiguales, réstese el menor del mayor. Sobre el par formado por el resto de esta operación y el menor de estos números dados repítase la misma operación. Si nunca el resto obtenido divide el número anterior, hasta que se llegue a la unidad, los dos números serán primos entre sí.*

VII, 2. *Dados dos números que no sean primos entre sí, determinar su máximo común divisor.*

El orden de las dos proposiciones podría evidentemente, y acaso útilmente, invertirse. En un corolario Euclides nota que cualquier divisor común de los números dados es divisor de ese máximo común divisor.

Podemos pasar por alto la prop. VII, 3, que sólo extiende la VII, 2 a la determinación del máximo común divisor entre tres números dados, sobreentendiendo, según la costumbre de Euclides, la repetición del procedimiento para determinar el máximo común divisor de un número cual quiera de números dados; debemos dar al contrario una par ticular consideración a la proposición:

VII, 4. *Dados dos números, el menor es siempre parte o partes del mayor.*

Muy a propósito hace notar H. G. Zeuthen que esta proposición debe ser tomada conjuntamente con su demostración y con las definiciones 3 y 4 puestas al principio del Libro, para definir un sentido preciso a las palabras *parte* y *partes*, idéntico a *fracción irreductible*[1]. En efecto, la def. 3 dice: "Un número es una *parte* de otro mayor si lo mide"; y la def. 4: "pero es *partes* si no lo mide"; sin considerar la prop. 4, la interpretación más natural del vocablo "partes" sería simplemente *fracción* (y ésta es la traducción elegida en la citada edición crítica). La demostración de VII, 4 se desarrolla como sigue: Sean a y b los dos números dados; si b es divisor de a, este a se compone de un cierto número c de partes iguales a b (Euclides lo representa por segmentos); pero, si b no es divisor de a, por las prop. 1 y 2 podrá determinarse un máximo común divisor, que eventualmente puede ser la unidad; sea c este m. c. d.; se dividirán a y b en partes iguales a c, de las que a contendrá cierto número d y b cierto número e; podremos escribir $a = cd$, $b = ce$; b está constituido por e partes iguales de las que tomando d se obtiene a.

---

[1] En la edición crítica de los *Elementos* publicada bajo la dirección de F. Enriques (los Libros VII, VIII y IX han estado a cargo de G. Rietti) se recuerda esta observación de Zeuthen en la memoria: *Notes sur l'histoire des Mathématiques* –VII– *Sur la constitution des livres arithmétiques des Éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité* (Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, 1910); sin embargo, no nos parece puesta lo suficientemente en evidencia –allí, ni tampoco en la memoria original– la función esencial de esta irreductibilidad en la siguiente construcción euclidiana.

Euclides no podía ignorar que, si la palabra "parte" se tomaba en su sentido literal, y en sentido literal igualmente se tomaba la conclusión que hemos escrito en forma aun más explícita que en el texto, la prop. 4 no necesitaba demostración, pues era suficiente tomar como parte la unidad, y *b* habría sido un cierto número de partes (unidades) iguales a las unidades que componen *a*. La esencial razón de ser de la prop. 4 es que, por una construcción determinada, hace corresponder a cada par de números *a*, *b* otro par *d*, *e* con ciertas características particulares que se estudiarán a continuación. El mismo par *d*, *e* podrá corresponder de esta manera a muchos pares *a*, *b* y se expresará esta propiedad común a todos estos pares diciendo que en todos, *b* es "las mismas partes" de *a*.

Euclides no tiene un término para expresar "*e* *d*-avos", el cual faltaba por otra parte al idioma salvo para determinados quebrados de uso corriente. Implícitamente asimila el concepto a la "razón" del Libro V, que no sabe definir mejor que como "una manera de ser", y lo que es más, la asimilación no es injustificada.

En la def. 20 Euclides establece: *Cuatro números se dicen en proporción cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo como el tercero es del cuarto.* Para que la definición tenga sentido es necesario que se dé un procedimiento para reconocer cuándo dos pares de números se encuentran en esa condición de ser el primer número las mismas partes del segundo y es solamente la noción precisa proporcionada por la demostración de la prop. VII, 4 la que permite dar ese procedimiento. Pero ¿qué es lo que permite a Euclides utilizar nuevamente aquí, con nueva definición, el

término "proporción" que ya tenía un sentido determinado por el Libro V? Es muy fácil ver que *si se verifican las condiciones enunciadas en esta def. 20 los cuatro números están en proporción según las definiciones 5, 6 del Libro V*. En efecto, si a, b son números tales que, llamando c a su m.c.d., $a = cd$, $b = ce$, cualesquiera sean los enteros m, n será $ma >, =, < nb$ según es $md >, =, < ne$. Si A, B son otros dos números tales que, siendo C su m.c.d., todavía $A = Cd$, $B = Ce$, se realizarán luego siempre conjuntamente las relaciones homólogas $ma >, =, < nb$ y $mA >, =, < nB$. La propiedad inversa es también inmediata si el primero y el tercer número son múltiplos respectivamente del segundo y el cuarto, porque, si $a = cb$, $A = CB$, eligiendo arbitrariamente un número m, si $c \neq C$, luego $mc \neq mC$, bastará elegir $n = mc$ para asegurar que no se realizarán conjuntamente las relaciones homólogas $ma >, =, < nb$, $mA >, =, < nB$.

Para conducir una demostración análoga de que, realizándose la proporcionalidad según la definición del Libro V, se realizarán también según la nueva, en el caso de números que sean parte o partes uno del otro, supongamos que sea

$$a = cd,\ b = ce,\ A=CD\ ,\ B=CE$$
$$(\ c = \text{m.c.d.}\ (a,b)\ ,\ C = \text{m.c.d.}(A,B)\ );$$
$$\text{será}\quad eEa = ceEd = bEd,\ eEA = CeeD = BeD$$

y no se realizarán las condiciones homólogas $eEa >, =, < dEb$, $eEA >, =, < dEB$ si no es $dE = De$. Se trata de mostrar que esta relación, teniendo en cuenta la definición de d, e, D, E, sólo se realiza por $d = D$, $e = E$.

Este es el problema fundamental del Libro VII y está resuelto por el conjunto de las proposiciones desde la 19 hasta la 24; sin embargo, sea la culpa de Euclides, o bien del

modo como la obra ha llegado a nosotros, es otro el orden de sucesión de las proposiciones.

Debemos notar en efecto que, siguiendo una tradición cuyo origen no conocemos, las traducciones acreditadas de la obra euclidiana llevan llamadas explicatorias que no hay ninguna razón de atribuir a un texto original, pues no se encuentran en ediciones más antiguas. La edición de Heiberg, hoy la más apreciada, sobre la que están uniformadas las mejores corrientes en todos los idiomas, contiene hacia el final de la prop. 19 una referencia a la prop. 7 del Libro V que, como hizo notar Zeuthen en el trabajo recordado, no se puede admitir, porque a esta altura todavía no está establecida la equivalencia de la definición de proporcionalidad entre números del Libro VII con la general definición de proporcionalidad entre magnitudes del Libro V. Concluye simplemente Zeuthen: "Il faut donc croire qu'Euclide regarde les deux conclusions en question comme des conséquences immédiates de la definition du VIIe livre, et en cela il n'a pas tort". Pero ciertamente la simple afirmación de que Euclides no está en falta por dar cierta conclusión por evidente no vale una demostración. Vamos pues a hacer un análisis más cuidadoso.

Las proposiciones VII, 20, 21, 22 dicen:

- *Los números más pequeños que están entre sí como dos números dados son equisubmúltiplos de dichos números, respectivamente el mayor del mayor y el menor del menor.*
- *Entre los números que están entre ellos en la misma razón, los primos entre sí son los menores.*
- *Los menores entre los números que tienen la misma razón son primos entre sí.*

Se supone implícitamente en estos tres enunciados que sea conocido por lo menos uno de estos dos hechos: existe un par de números mínimos entre los que tienen una misma razón; existe un par de números primos entre sí entre los pares que tienen la misma razón. (Nótese que aun admitiendo como evidente que en todo sistema de enteros hay un mínimo, tal evidencia ya no puede valer cuando se pide un par mínimo.) Ahora las dos proposiciones están comprendidas en la demostración de VII, 4; en efecto, supongamos que, siendo dados los dos números a, b, se haya determinado, como se dijo, su m. c. d. c y que se haya puesto $a = cd$, $b = ce$; d y e son primos entre sí; en efecto, supongamos que tuvieran un m. c. d. $f > 1$ y pongamos $d = fg$, $e = fh$; resulta por sustitución $a = cfg$, $b = cfh$ y sería luego divisor común de a y b el producto $cf > c$, contra la hipótesis de que c fuese el máximo común divisor de a, b. Se sigue que d, e son primos entre sí; y si al par d, e se le aplica el procedimiento de la prop. 4 para determinar su razón, se encuentra 1 como máximo común divisor y el mismo par d, e como razón (partes). (Nótese también que sin esta demostración, la definición no asegura que si el par d, e representa la razón entre a y b, representa todavía la razón entre los mismos d, e.)

Después de esto puede aplicarse VII, 21, de la cual VII, 20 y 22 son complementarias, como demostración de unicidad. Puede entonces también regularizarse la demostración de la segunda parte de VII, 19 eliminando la referencia desacertada al Libro V. En efecto, sean a, b, A, B números tales que $aB = Ab$; y sea (d, e) la razón entre a y b; póngase $aA = g$, $aB = Ab = f$; g y f tienen la misma razón que a, b y que A, B; pero la razón entre dos números es única; luego a, b y A, B tienen la misma razón.

En el caso especial de la igualdad $dE=De$ que nos ha llevado a la discusión, por ser *d*, *e* primos entre sí e igualmente D, E, los dos pares deben coincidir.

Ahora VII, 23 dice: *Si dos números son primos entre sí, cualquier número que divide a uno de ellos es primo con el otro*, con una simple demostración por absurdo, que habría podido ponerse en cualquier lugar; la proposición está aquí para preparar a VII, 24: *Si dos números son primos con un tercero, también su producto es primo con él.* Sean *a*, *b* los dos primeros números, *c* el tercero; sea $d=ab$ y supóngase por absurdo que *c* y *d* no sean primos entre sí; existirá $e=$m.c.d. (c, d). *e* divide *c*; *c* es primo con *a*; luego por VII, 23, *e* es primo con *a*. Pero *e* es divisor de *d*; póngase $d=ef$; será $ab = ef$; luego por VII, 19, $e : a = b : f$. Siendo *e*, *a* primos entre sí el par (e, a) representa la razón entre *b* y *f* y por tanto *e* es divisor o igual a *b* (VII, 20), en contra de la hipótesis.

La demostración se aplica invariada, sólo eliminando la vuelta alrededor del absurdo, para concluir (lo que Euclides aquí no hace explícitamente, pero que resultará del conjunto): *Si el número c es primo con a y divide el producto ab, c será divisor de b.* En efecto, sea $ab = cd$; será $a : c = d : b$; pero *a* y *c* son primos entre sí, luego *a* es divisor de *d* y *c* es divisor de *b*.

En la def. 11 Euclides ha introducido el concepto de *número primo*: es un número que no tiene otros divisores que la unidad; para Euclides dividir tiene un sentido estricto y no puede decirse luego que un número sea divisor de sí mismo. La existencia de números primos puede ser dejada a la experiencia, pues son tales 2 y 3; sin embargo, ella será confirmada por la prop. VII, 31, que afirma que cada número compuesto tiene algún divisor primo. Más tarde, en el Libro IX, se demostrará también que existen infinitos

La prop. VII, 29 establece la propiedad evidente, pero fundamental, que liga el concepto de número primo (absoluto) al de número primo respecto de otro: *Todo número primo es primo con cualquier número del cual no sea divisor*, lo que permite aplicar a los números primos las conclusiones precedentes para los números primos relativamente. Así VII, 30 nos dirá que *si un número primo divide un producto divide al menos uno de los factores*, que no es más que una inversa parcial de VII, 24.

El Libro VII se compone de 39 proposiciones; muchas más, pues, de las que hemos examinado; algunas todavía importantes, como las que introducen el mínimo común múltiplo, pero que no difieren en nada de lo que se hace en los modernos tratados; algunas de puntualización como, por ejemplo, la demostración de la distributividad de la multiplicación respecto de las operaciones de suma y resta y de la invertibilidad de los factores de un producto; algunas que pueden entrar en la observación general de prolijidad que hicimos sobre los Libros aritméticos.

De cualquier modo, el Libro VII queda admirable como fundación de la teoría de la divisibilidad, con un sentido y –salvo la rectificación que hicimos al grupo de las proposiciones 19-22 y la consiguiente pequeña complementación a la 4– con un rigor en todo comparable a las teorías modernas; tanto más admirable si se quiere aceptar la consideración de Zeuthen de que deba creerse que en ese tiempo las operaciones con números primos, máximo común divisor y mínimo común múltiplo eran habituales en la práctica como conocimientos intuitivos, por lo que ya deba considerarse como un descubrimiento haber supuesto la necesidad de demostración. Y, observa Zeuthen, "Ce qui cause encore

aujourd'hui des difficultés aux professeurs de nos écoles, ce n'est pas d'apprendre à leurs éléves la démonstration de l'univocité dont nous parlons, mais de leur faire comprende la nécessité de la démontrer".

Es notable sin embargo que Euclides, después de haber establecido (VII, 32) que un número o es primo o tiene un divisor primo, no da el pequeño paso ulterior de afirmar la descomposición de cualquier número en factores primos que habría probablemente simplificado muchos de los desarrollos siguientes.

Vale la pena comparar el procedimiento de Euclides con la forma quizás menos artificiosa por la cual, en la aritmética moderna, acostumbramos llegar a la fundamental proposición VII, 24. Dados dos números a, b, el procedimiento de las divisiones sucesivas se concreta en la sucesión de igualdades:

$$a = qb + r\,,\ b = q_1 r + r_1\,,\ r = q_2 r_1 + r_2\,, \dots$$

donde los valores absolutos de las r_i son decrecientes; si a y b son primos entre sí la última r_i vale 1. Las mismas igualdades se escriben:

$$\begin{aligned} r &= a - qb \\ r_1 &= b - q_1 r = b - q_1(a - qb) = (q_1 q + 1)\, b - q_1 a \\ r_2 &= r - q_2 r_1\, (a - qb) + q_2(q_1 a - (q_1 q + 1)\, b) \\ &= h_2 a + k_2 b \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_i &= h_i a + k_i b \end{aligned}$$

Se ve que cada r_i se expresa como combinación lineal de a y b. En particular, si a y b son primos entre sí, se obtiene, para valores convenientes de h, k,

$ha = kb + 1.$

Sea ahora A otro número primo con b; se obtendrá análogamente una igualdad de la forma

$b'A = k'b + 1;$

y multiplicando entre sí las dos igualdades

$bb'aA = Mb + 1,$

lo que demuestra que el producto aA será todavía primo con b.

La falta del simbolismo literal habría hecho casi imposible a Euclides expresar tal razonamiento, lo que añade a nuestra admiración por el fino arte –presentado acaso en modo un poco hermético– con el cual supo superar el obstáculo.

La teoría del Libro VII ha puesto por completo en las manos de Euclides la noción del número racional; a esta noción él la llama *razón entre enteros*, pero no es más esa relación imprecisa como la enunciada en la def. 3 del Libro V; ella tiene representación concreta y unívoca constituida por un par de enteros primos entre sí. Una vez establecida la identidad de la noción de proporción definida por la def. 20 del Libro VII con la otra de la def. 5-6 del Libro V, se puede aplicar sin más la def. 7 de este mismo Libro para establecer un orden en *la serie de los números racionales*. Pues bien, como ya notamos, Euclides rechaza la formalización de la noción; el Libro VIII está destinado casi por completo a desarrollar fatigosamente una serie de teoremas sobre el cálculo y las propiedades de los números racionales en términos de proporciones y de razones. En la prop. VII, 27, como consecuencia inmediata de VII, 24, se había establecido que si dos números

son primos entre sí, son tales también sus cuadrados, sus cubos, etc. ¿Qué son las razones representadas por estos nuevos pares irreductibles? Son las potencias de las razones entre los números dados; y si, invirtiendo, llegamos a concebir la raíz *n*-ésima, tenemos enseguida que será irracional la raíz *n*-ésima de la razón de dos números primos entre sí que no sean potencias *n*-ésimas. Por falta del lenguaje apropiado Euclides oculta la inferencia en una sucesión de deducciones. Para poder aplicar la noción de potencia igualmente a los números (enteros) y a las razones, hablará de *proporción continua*, esto es, en lenguaje moderno, de progresiones geométricas; la potencia *n*-ésima de una razón está representada por una progresión geométrica de $n + 1$ términos, según la razón dada. Pero los términos extremos de tal progresión no pueden ser cualesquiera: las proposiciones VIII, 1, 2, 3, 8, nos dicen en conjunto que *los términos de una progresión geométrica de* $n + 1$ *términos según una dada razón* $a : b$ (a, b primos entre sí) *se obtienen multiplicando por un factor común* (arbitrario) *los términos de una particular de términos mínimos, que tiene como extremos* a'' *y* b'', *y éstos son números primos entre sí*; pero lo que no se dice, probablemente por falta del término apropiado, es que estos extremos sean precisamente *n*-ésimas potencias, reservando la observación a los casos de $n = 2$ y $n = 3$ (donde se dice cuadrados y cubos) (VIII, 11, 12); pero se provee a llenar la falla con la observación VIII, 9, 10 de que *estos dos números son precisamente los extremos de otras dos progresiones geométricas de* $n + 1$ *términos cuyo primer término es la unidad*; observación que, mientras precisamente define la *n*-ésima potencia, tiene el significado particular de establecer la identidad, en una misma abstracción, de las operaciones sobre números y sobre razones. Por otra parte,

VIII, 6, 7, 9, 10 constituyen las proposiciones análogas del grupo 1, 2, 3, 8 en el caso en que la razón de la progresión fuese de la forma *m* ó 1: *m* (múltiplo o parte). En medio, las proposiciones 4, 5 enseñan a formar la razón producto de razones dadas (producto que, en el caso de dos factores, es la *razón compuesta* [VIII, 5]). No faltan detalles interesantes y curiosos: ¿por qué, por ej., en la prop. VIII, 4, en lugar de efectuar, como haríamos nosotros, el producto de antecedentes y de consecuentes, reservando al final de la operación una reducción a mínimos términos por medio de VII, 4, o bien, para obrar con términos mínimos, empezar con la descomposición de estos antecedentes y consecuentes en factores primos, se usa un procedimiento relativamente complicado con sucesivas determinaciones de máximos comunes divisores? Desgraciadamente no es costumbre de Euclides darnos aclaraciones de esta naturaleza y el análisis que precede demuestra, según nos parece, bastante bien lo que antes señalamos como oculto por él dentro de la sucesión de las proposiciones. Sin embargo parece ser una explicación precisamente el deseo, y prácticamente la necesidad, de calcular con términos mínimos, mientras notamos que Euclides se para delante de la descomposición de los números en factores primos.

Nos parece inútil llevar más adelante el examen de las 27 proposiciones que forman parte del Libro VIII, una ejercitación sobre productos y potencias de razones.

El Libro IX puede tener análoga definición con respecto al cálculo con números enteros; y el interés del mismo debería declararse absolutamente exiguo si no fuera por tres proposiciones 20, 35, 36, que, por demás, son independientes de las anteriores del Libro:

IX, 20. *La serie de los números primos es infinita.* La demostración es la misma que todavía se da corrientemente en los tratados modernos.

IX, 35. *Dada una sucesión de términos en progresión geométrica, la diferencia entre el segundo y el primer término está al primero como la diferencia entre el último y el primero está a la suma de todos los términos salvo el último.* Se nota que

$$aq^{n} - a = (aq^{n} - aq^{n} - 1) + (aq^{n-1} - aq^{n-2}) + ... + (aq - a)$$

$$= \frac{(aq - a)\ aq^{n-1} aq^{n-2} + ... + a}{a}$$

IX, 36. *Si la suma de una sucesión de potencias de 2 es un número primo, el producto de éste por la mayor de dichas potencias de 2 es un número perfecto*, es decir, es igual a la suma de sus divisores. La demostración consiste simplemente en observar que los únicos divisores del número así formado son las dadas potencias de 2 y su producto por el factor primo diferente a 2 y aplicar el teorema anterior. La proposición no parece tener interés en el sistema de Euclides y podría tan sólo ser una contestación racional a observaciones pitagóricas sobre propiedades de los números obtenidas, por lo menos en principio, empíricamente en casos particulares. Sin embargo, el teorema de Euclides es notable por que la teoría de números no pudo hasta hoy añadirle sobre números perfectos, sino la recíproca parcial de que cualquier número perfecto par tiene necesariamente la forma euclidiana, mientras que no se conocen números perfectos impares.

El Libro X, el más extenso de la obra de Euclides es la contestación, en sentido amplio, al problema de la irracionalidad en la forma propuesta por Theetetes. Por sus 115 proposiciones apoyadas en una nomenclatura complicada y sin ningún fin visible de mayores aplicaciones, ha sido considerado a menudo como un acertijo de poco interés y otra vez sobrevaluado comparándolo con algún capítulo de la moderna teoría de los números algebraicos. No nos parece ni una ni otra cosa, sino que su razón de ser sea explicada por la proposición final: *de una medial nacen infinitas magnitudes irracionales y ninguna es igual a una anterior* [2]; cuando Theetetes, en el diálogo platónico, enuncia con toda generalidad la condición para que la raíz cuadrada de un número entero sea irracional, agrega sin mayores explicaciones: lo mismo hicimos para los sólidos. Esto significa que el problema de ver cuán amplio fuera el campo de lo irracional estaba delante. La contestación que puede incluirse en ese "mismo" ya está contenida en los Libros VII y VIII de donde desciende que la raíz *n*-ésima de un entero que no sea potencia *n*-ésima de un entero es irracional. El Libro X proporciona una contestación más amplia indicando cómo siempre el mismo procedimiento de extracción de raíces permite ampliar indefinidamente con nuevas irracionalidades un campo numérico deducido de los racionales por un número finito de tales operaciones. Y nos parece de sumo interés esta concepción de lo infinito que

[2] No vemos la razón por la cual según algunos comentadores –entre otros Heiberg– debería por el contrario considerarse esta proposición como una añadidura posterior, mientras no se indica a qué matemático podría atribuirse.

Euclides nos presenta igualmente en la demostración de la deducción infinita de números primos de un grupo de tales previamente dado, y que parece manifestarse, al menos como tentativa, en el teorema sobre los números perfectos que serían infinitos si se pudiera mostrar que son infinitos los números primos sumas de potencias sucesivas de 2.

Una breve consideración merecen las primeras proposiciones de este Libro X, por razón distinta de la anterior. Leemos:

X, 2. *Dadas dos magnitudes desiguales, si sustrayendo repetidamente de la mayor magnitud la menor, nunca la magnitud obtenida como residuo mide a la anterior, las dos magnitudes serán inconmensurables.*

X, 3. *Dadas dos magnitudes conmensurables, encontrar su medida común.*

X, 4. *Dadas tres magnitudes conmensurables, encontrar su máxima medida común.*

Ellas parecen repetir exactamente las tres primeras proposiciones del Libro VII, con la sola diferencia de referirse a magnitudes en vez de números, y, por esta razón la primera termina con la conclusión de la inconmensurabilidad, que no era posible con los números. Un examen atento demuestra que no es repetición, sino el puente necesario para poder utilizar para las magnitudes los resultados encontrados referidos a los números; en efecto, los números enteros y razones en el sentido del Libro VII pueden aplicarse a las magnitudes, sólo cuando éstas sean conmensurables y aun se conozca una medida común; la decisión relativa a estas demandas debe luego preceder. Después de ellas las proposiciones X, 5 a 8 pueden afir-

mar la identidad entre las nociones de "magnitudes conmensurables" y "que tienen entre ellas la razón que un número entero tiene a otro entero", lo que permite, en la prop. X, 9, dar la primera resolución de la cuestión de Theetetes: *Los cuadrados construidos sobre rectas conmensurables en longitud tienen entre sí la razón que tiene un número cuadrado a un número cuadrado; y los cuadrados cuya razón es la de un número cuadrado a un número cuadrado tienen sus lados conmensurables en longitud. Pero los cuadrados construidos sobre rectas inconmensurables en longitud no tienen la razón de un número cuadrado a otro número cuadrado, y los cuadrados cuya razón no es la de un número cuadrado a un número cuadrado no tienen los lados conmensurables en longitud.* Evidentemente la segunda parte de la proposición es redundante, pues es inversión lógica de la primera. En cuanto a ésta basta recordar que por las prop. VI, 19, 20, polígonos semejantes (en particular cuadrados) están entre ellos en la razón duplicada de los lados; si por tanto a, b son segmentos y c, d números, hay equivalencia entre las proporciones $a : b = c : d$ y *cuadrado sobre* a : *cuadrado sobre* $b = c^2 : d^2$.

Terminamos aquí nuestra lectura y comentario de los *Elementos*. No hemos hablado del Libro XIII; puede considerarse como una coronación, pero no tiene importancia conceptual. Como coronación, enseña la construcción y las propiedades de los poliedros regulares; incidentalmente, como preparación, contiene varios teoremas sobre el pentágono regular que, como se sabe, se presenta en el dodecaedro y en el icosaedro, teoremas que habrían podido encontrar su lugar como aplicaciones en los Libros anteriores; contiene también el teorema que afirma que no hay otros poliedros regulares además de los 5 platónicos; y si se piensa en la importancia que ellos tuvieron para la filosofía pitagórica, se puede bien

pensar que tal coronación fuera digna propiamente para mostrar, con Sócrates, la potencia del pensamiento abstracto. Una comprobación de ese interés puede encontrarse en el hecho de que, más que los otros, contiene este Libro probables interpolaciones de geómetras posteriores, de valor indudablemente menor, a los cuales pertenecen además otros dos Libros con el mismo argumento: el XIV, que se atribuye al geómetra Ipsicles, del siglo II a. C., y el XV, en el cual aun el examen filológico muestra la composición con elementos de siglos sucesivos.

Nota Bibliográfica

Hemos observado en una nota (página 89) que para la completa comprensión de nuestro análisis del pensamiento euclídeo puede resultar deseable que el lector tenga presente alguna vez el texto de los *Elementos*.

La bibliografía de las traducciones en los idiomas vulgares es muy extensa principalmente en lo que va desde el siglo XV al XVIII; no todas absolutamente fieles y completas, pero máxime en los primeros tiempos los traductores han tenido la costumbre de señalar lo que es comentario y lo que es texto. Nosotros hemos reproducido como adorno del libro las tapas de la versión italiana de Nicoló Tartaglia (1565) y de la versión latina de Clavio (Christoforus Clavius alias Christoph Schlüssel) (1574); esta última tuvo varias ediciones sucesivas. Otra traducción latina de 1572 es de Federico Commandino. De una traducción inglesa aparecida en 1570 por H. Billingfley ha dado noticia recientemente *The Mathematical Gazette* (London, febrero 1947).

En los siglos siguientes se publicaron preferentemente reducciones y "restituciones" con fines didácticos o científicos. Las *restituciones* son por supuesto, desde nuestro punto de vista, corrupciones, aunque los autores entendieran hacer obra científica; propiamente en este sentido hemos citado la de Borelli, la cual sin embargo contiene un índice de las proposiciones según el texto euclídeo con la referencia de las correspondientes en la reconstrucción. Asimismo, un autor que en el siglo XVIII tuvo una especie de dominio didáctico (como en el XIX lo tuvo con mayor merito Legendre) fue el padre Andrés Tacquet, cuya geometría, aun apoyándose en Euclides y Arquímedes, no pretende ser más que un resumen y adaptación. Sin embargo, una traducción crítica latina, citada frecuentemente como la edición de Oxford, publicó en 1703 David Gregory.

En 1814-18 E. Peyrard publicó en París una edición crítica con texto griego, latino y francés, *Les oeuvres d' Euclide d'après un manusc* [illegible]

ancien, etc., notable por indicaciones comparativas de manuscritos antiguos y ediciones anteriores.

Llegamos luego a los años 1883-1888 cuando I. L. Heiberg publicó otra edición crítica en griego y latín por el editor Teubner de Lipsia en 5 volúmenes: *Euclidis Elementa, edidit et latine interpretatus*.

A principios de siglo (1908) Th. L. Heat recabó de este texto de Heiberg una traducción inglesa *The thirteen Books of Euclid's* (Cambridge University Press - 3 vol.) con muchos comentarios y publicó nuevamente en 1926 una segunda edición, ampliada en esta parte.

Entre 1925 y 1936 otra edición, esta vez italiana, también comentada, *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, fue publicada bajo la dirección de Federigo Enriques por los editores Stock y Zanichelli.

Las cuatro últimas obras se encuentran sin excesiva dificultad en las bibliotecas y las últimas tres también en el comercio.

En 1946 la Universidad Nacional de México anunció una edición castellana con griego en frente, de la cual en cuanto sabemos ha salido sólo un primer volumen por J. D. García Bacca, conteniendo además de algunos capítulos introductorios, los Libros I y II.

Aunque de menor importancia, podría ser útil al lector o por lo menos procurarle alguna satisfacción en la lectura del primer capítulo nuestro tener entre manos ciertos diálogos platónicos. De éstos muchas traducciones existen en todos los idiomas, más o menos completas, más o menos exactas, pero aun fáciles de encontrar. Citamos la edición española de las *Obras Completas de Platón* por D. Patricio de Azcárate, publicada en Madrid en 1871 y años siguientes en muchos volúmenes. Pero, precisamente por la vastedad de la obra, es más fácil dirigirse hacia las traducciones de diálogos particulares. En la introducción de la traducción del *Sofista*, Giuseppe Fraccaroli justifica su trabajo observando que el griego de Platón no puede ser entendido rectamente sin un detenido estudio analítico y por esta razón hemos dicho en cierto lugar que quisimos dirigirnos hacia traducciones hechas con espíritu crítico y literario. Citamos a este efecto y por las referencias del presente trabajo *Il Timeo* por G. Fraccaroli (1906), *Il sofista e L' uomo politico* por el mismo autor (1911), *La Repubblica* (póstuma) del mismo, *Il Teeteto* por M. Valgimigli. Un poco menos acreditadas filológicamente son las traducciones de muchos *Diálogos* por Francisco Acri, del cual utilizamos principalmente *Il Menone*.